



*Il n'est pas nécessaire de traiter tous les exercices pour obtenir la note maximale. Réussir quelques exercices avec honnêteté, en montrant une bonne connaissance du cours et une bonne capacité à dialoguer suffit à obtenir une excellente note. Il est possible d'obtenir une correction de certains exercices, en me contactant par mail.*



#### Exercice 1

Rappeler et montrer la formule des capitaines.

#### Exercice 2

Soit  $E$  un ensemble et  $A, B, C$  des parties de  $E$ . Démontrer :

1.  $A \cap B = A \Leftrightarrow A \subset B$ .
2.  $A \cap B = A \cap C \Leftrightarrow A \cap \bar{B} = A \cap \bar{C}$ .
3.  $(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A) = (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)$ .

#### Exercice 3

Déterminer l'ensemble des nombres complexes  $z$  tels que  $|z - 1| = |z| = 1$ .

#### Exercice 4

Soit  $E$  un ensemble,  $A$  et  $B$  des parties de  $E$ . Résoudre  $A \cup X = B$ , d'inconnue  $X \in \mathcal{P}(E)$ .

#### Exercice 5

Déterminer les fonctions  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  vérifiant l'équation fonctionnelle suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) + xf(1-x) = 1 + x.$$



*Il n'est pas nécessaire de traiter tous les exercices pour obtenir la note maximale. Réussir quelques exercices avec honnêteté, en montrant une bonne connaissance du cours et une bonne capacité à dialoguer suffit à obtenir une excellente note. Il est possible d'obtenir une correction de certains exercices, en me contactant par mail.*



### Exercice 1

Prouver la formule pour  $\binom{n}{k}$ .

### Exercice 2

Soit  $E$  un ensemble et  $A, B, C$  des parties de  $E$ . Démontrer :

1.  $A \cup B = A \Leftrightarrow B \subset A$ .
2.  $(A \setminus C) \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C$ .
3.  $(A \setminus C) \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus C$ .

### Exercice 3

Soit  $U = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$

1. Démontrer que si  $z \in \mathbb{R}$  alors  $\frac{1+iz}{1-iz} \in U$ .
2. Etudier la réciproque.

### Exercice 4

Soit  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq 1\}$ . Montrer que  $D$  n'est pas le produit cartésien de deux parties de  $\mathbb{R}$ .

### Exercice 5

Trouver toutes les fonctions  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  vérifiant l'équation fonctionnelle suivante :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x)f(y) - f(xy) = x + y.$$



*Il n'est pas nécessaire de traiter tous les exercices pour obtenir la note maximale. Réussir quelques exercices avec honnêteté, en montrant une bonne connaissance du cours et une bonne capacité à dialoguer suffit à obtenir une excellente note. Il est possible d'obtenir une correction de certains exercices, en me contactant par mail.*



### Exercice 1

Rappeler et montrer la relation de Pascal.

### Exercice 2

Soit  $E$  un ensemble et  $A, B, C$  des parties de  $E$ . Démontrer que :

1.  $A \cup B = A \cap B \Leftrightarrow A = B$ .
2.  $(A \cap B \subset A \cap C \text{ et } A \cup B \subset A \cup C) \Rightarrow B \subset C$ .
3.  $(A \setminus C) \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$ .

### Exercice 3

Soient les ensembles  $E = \{z \in \mathbb{C}, \text{Im}(z) > 0\}$  et  $F = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$

1. Montrer que si  $z \in E$  alors  $\frac{z-i}{z+i} \in F$ .
2. Etudier la réciproque.

### Exercice 4

Soit  $E$  un ensemble,  $A$  et  $B$  des parties de  $E$ . Déterminer les parties  $X$  de  $E$  telles que  $A \cap X = B$ .

### Exercice 5

Trouver les fonctions  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  vérifiant, pour tout  $x, y \in \mathbb{R}$ ,

$$f(x - f(y)) = -x^2 + 2xf(y) + f(f(y)) + f(0).$$