Il n'est pas nécessaire de traiter tous les exercices pour obtenir la note maximale. Réussir quelques exercices avec honnêteté, en montrant une bonne connaissance du cours et une bonne capacité à dialoguer suffit à obtenir une excellente note. Il est possible d'obtenir une correction de certains exercices, en me contactant par mail.

Exercice 1

Rappeler et montrer la formule du binôme de Newton.

Exercice 2

Calculer $\sum_{k=0}^{n} kk!$, $\sum_{k=2}^{n} \ln(1 - \frac{1}{k^2})$, puis $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$.

Exercice 3

Montrer que pour tout $(n;p) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n \geq p$: $\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$.

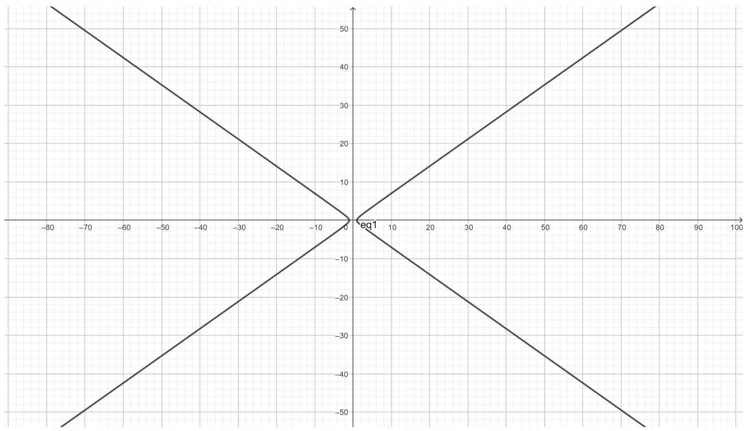
Exercice 4

Soit $n \geq 1$, et $x_1, ...x_n$ des réels tels que $\sum_{k=1}^{n} x_k = n$ et $\sum_{k=1}^{n} x_k^2 = n$.
Montrer que pour tout $1 \leq k \leq n$, $x_k = 1$.

Exercice 5 : Equation de Pell Fermat

L'objet de l'exercice est de montrer que l'équation $x^2 - 2y^2 = 1$ admet une infinité de solutions, où x, y sont des entiers naturels.

1. Montrer qu'il existe des entiers x_n et y_n tels que $(3 + 2\sqrt{2})^n = x_n + \sqrt{2} y_n$.
2. Donner une expression de x_{n+1} en fonction de x_n. De même pour y_n.
3. Montrer que les suites (x_n) et (y_n) sont strictement croissantes.
4. Conclure. On pourra regarder $(3 - 2\sqrt{2})^n$.



Les équations de Pell-Fermat sont des équations de la forme $y^2 - dx^2 = 1$, où d est un entier qui n'est pas un carré. On peut montrer, c'est un problème courant en MPSI, qu'elles ont toujours une infinité de solutions entières. Ces équations portent le nom du mathématicien anglais Pell, mais ont été étudiées et résolues par le mathématicien indien Brahmagupta près de 1000 ans avant Pell (VII ème avant J.C). C'est Euler qui les a, par erreur, attribuées à Pell, alors même qu'il n'a absolument rien à voir avec ces dernières. Une première preuve rigoureuse de leur infinité de solutions a été donnée par Lagrange.

Il n'est pas nécessaire de traiter tous les exercices pour obtenir la note maximale. Réussir quelques exercices avec honnêteté, en montrant une bonne connaissance du cours et une bonne capacité à dialoguer suffit à obtenir une excellente note. Il est possible d'obtenir une correction de certains exercices, en me contactant par mail.

Exercice 1

Rappeler et prouver la formule de Bernoulli.

Exercice 2

Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1}{(k+1)(k+3)} = \frac{a}{k+1} + \frac{b}{k+3}.$$

En déduire la valeur de la somme

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+3)}.$$

Exercice 3

Soit E un ensemble à n éléments. Calculer $\displaystyle\sum_{X \in \mathcal{P}(E)} \operatorname{card}(X)$.

Exercice 4

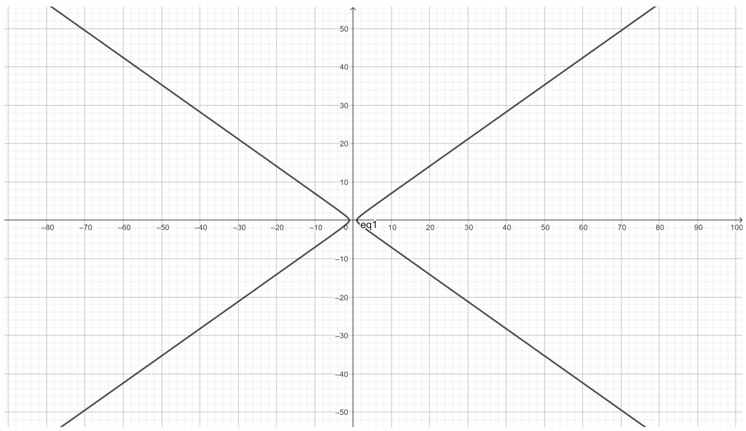
Les deux questions sont indépendantes, mais la première doit vous inspirer pour résoudre la seconde.

1. (a) Soit $P(X) = (X+1)^n$. Donner P sous la forme d'une somme.
   (b) Calculer P' sous deux formes.
   (c) En déduire $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k}$.
2. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}^2$ en utilisant les polynômes $P = (X+1)^n$ et $Q = (X-1)^n$.

Exercice 5 : Equation de Pell Fermat

L'objet de l'exercice est de montrer que l'équation $x^2 - 2y^2 = 1$ admet une infinité de solutions, où x, y sont des entiers naturels.

1. Montrer qu'il existe des entiers x_n et y_n tels que $(3 + 2\sqrt{2})^n = x_n + \sqrt{2}y_n$.
2. Donner une expression de x_{n+1} en fonction de x_n. De même pour y_n.
3. Montrer que les suites (x_n) et (y_n) sont strictement croissantes.
4. Conclure. On pourra regarder $(3 - 2\sqrt{2})^n$.



Les équations de Pell-Fermat sont des équations de la forme $y^2 - dx^2 = 1$, où d est un entier qui n'est pas un carré. On peut montrer, c'est un problème courant en MPSI, qu'elles ont toujours une infinité de solutions entières. Ces équations portent le nom du mathématicien anglais Pell, mais ont été étudiées et résolues par le mathématicien indien Brahmagupta près de 1000 ans avant Pell (VII ème avant J.C). C'est Euler qui les a, par erreur, attribuées à Pell, alors même qu'il n'a absolument rien à voir avec ces dernières. Une première preuve rigoureuse de leur infinité de solutions a été donnée par Lagrange.

Il n'est pas nécessaire de traiter tous les exercices pour obtenir la note maximale. Réussir quelques exercices avec honnêteté, en montrant une bonne connaissance du cours et une bonne capacité à dialoguer suffit à obtenir une excellente note. Il est possible d'obtenir une correction de certains exercices, en me contactant par mail.

Exercice 1

Sommes classiques : $\sum_{k=0}^{n} q^k$, $\sum_{k=0}^{n} k$ et $\sum_{k=0}^{n} k^2$. Preuve de $\sum_{k=0}^{n} k^2$.

Exercice 2

Soit n un entier positif. Calculer $\sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{k} - \frac{1}{n-k+1})$.

Exercice 3

Calculer $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$ en utilisant $P(x) = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}x^{k-1}$. De manière analogue, calculer $\sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k}$.

Exercice 4Transformation d'Abel

Soit (a_n) et (b_n) des suites de réels, A_n et B_n leurs sommes partielles.

1. Montrer que $\sum_{k=0}^{n} a_k B_k = A_n B_n - \sum_{k=0}^{n} A_k b_k$.
2. En déduire $\sum_{k=0}^{n} k2^k$.

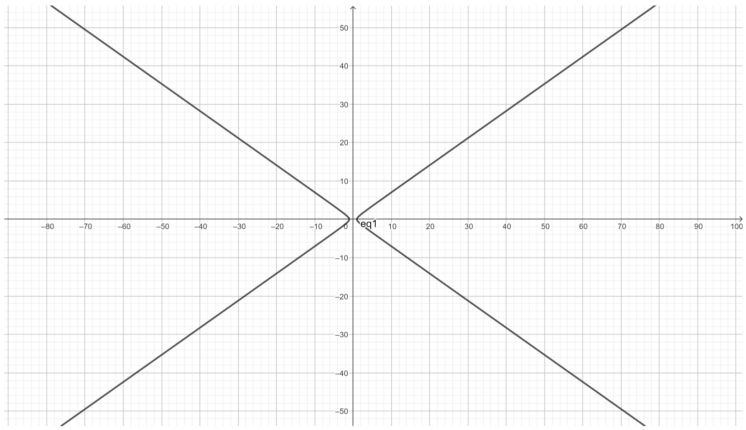
Exercice 5

Calculer $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k k$.

Exercice 6 : Equation de Pell Fermat

L'objet de l'exercice est de montrer que l'équation $x^2 - 2y^2 = 1$ admet une infinité de solutions, où x, y sont des entiers naturels.

1. Montrer qu'il existe des entiers x_n et y_n tels que $(3 + 2\sqrt{2})^n = x_n + \sqrt{2}y_n$.
2. Donner une expression de x_{n+1} en fonction de x_n. De même pour y_n.
3. Montrer que les suites (x_n) et (y_n) sont strictement croissantes.
4. Conclure. On pourra regarder $(3 - 2\sqrt{2})^n$.



Les équations de Pell-Fermat sont des équations de la forme $y^2 - dx^2 = 1$, où d est un entier qui n'est pas un carré. On peut montrer, c'est un problème courant en MPSI, qu'elles ont toujours une infinité de solutions entières. Ces équations portent le nom du mathématicien anglais Pell, mais ont été étudiées et résolues par le mathématicien indien Brahmagupta près de 1000 ans avant Pell (VII ème avant J.C). C'est Euler qui les a, par erreur, attribuées à Pell, alors même qu'il n'a absolument rien à voir avec ces dernières. Une première preuve rigoureuse de leur infinité de solutions a été donnée par Lagrange.