Il n'est pas nécessaire de traiter tous les exercices pour obtenir la note maximale. Réussir quelques exercices avec honnêteté, en montrant une bonne connaissance du cours et une bonne capacité à dialoguer suffit à obtenir une excellente note. Il est possible d'obtenir une correction de certains exercices, en me contactant par mail.

Exercice 1

Calculer une racine carrée de : $z_1 = 3 + 4i$.

Exercice 2

Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que $z + \dfrac{1}{z} \in \mathbb{R}$.

Exercice 3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $z \in \mathbb{C}$ tel que $z^n = (z+1)^n = 1$.
Montrer que z est une racine cubique de l'unité et que n est divisible par 6.

Exercice 4

Calculer $z_n = (1+i)^n - (1-i)^n$ où $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 5

Soit $z = e^{\frac{2i\pi}{7}}$. Soit $A = z + z^2 + z^4$ et $B = z^3 + z^5 + z^6$.

1. Calculer $A + B$ et A^2.
2. En déduire A et B.

Exercice 6

Résoudre l'équation
$$4iz^3 + 2(1+3i)z^2 - (5+4i)z + 3(1-7i) = 0$$
en cherchant une racine réelle.

Exercice 7

Soit x, y, z des réels tels que :
$$e^{ix} + e^{iy} + e^{iz} = 0.$$
Justifier que :
$$e^{2ix} + e^{2iy} + e^{2iz} = 0.$$

Exercice 8

Anneau des entiers de GaussOn appelle anneau des entiers de Gauss, noté $\mathbb{Z}[i]$, l'ensemble des complexes de la forme $a + ib$, où a et b sont des entiers relatifs.

1. Soit $z, z' \in \mathbb{Z}[i]$. Montrer que 1, $z - z'$ et zz' sont des entiers de Gauss. On a muni $\mathbb{Z}[i]$ d'une structure dite "d'anneau", qui sera étudiée plus tard dans l'année.
2. Si z et z' sont dans $\mathbb{Z}[i]$, on note $N(z\bar{z'}) = zz'$. Montrer que $N(z\bar{z'})$ est un entier.
3. On dit qu'un entier de Gauss z est inversible si il existe un entier de gauss z' tel que $zz' = 1$. Déterminer les entiers de Gauss inversibles. Soit $n \in \mathbb{N}$. On dit qu'un entier est somme de deux carrés si il existe deux entiers a et b tels que $n = a^2 + b^2$.
4. Montrer, en utilisant les entiers de Gauss, que si n et n' sont sommes de deux carrés, alors nn' est somme de deux carrés.
5. Retrouver ce résultat sans utiliser les entiers de Gauss.

Une étude plus poussée des entiers de Gauss permet de les munir d'une division euclidienne, et ces derniers ont plein d'applications en théorie des nombres. En particulier, ils ont permis à Gauss de démontrer, à seulement 18 ans, qu'un nombre est somme de deux carrés si et seulement si ses facteurs premiers congrus à 3 modulo 4 interviennent avec un exposant pair.

Il n'est pas nécessaire de traiter tous les exercices pour obtenir la note maximale. Réussir quelques exercices avec honnêteté, en montrant une bonne connaissance du cours et une bonne capacité à dialoguer suffit à obtenir une excellente note. Il est possible d'obtenir une correction de certains exercices, en me contactant par mail.

Exercice 1

Déterminer les racines carrés de $z = \sqrt{3} + i$ sous forme algébrique, puis sous forme trigonométrique. En déduire $\cos(\frac{\pi}{12})$.

Exercice 2

Déterminer l'ensemble des nombre complexes z tels que $\dfrac{z-3}{z-5+2i} \in]-\infty; 0[$.

Exercice 3

Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que $|z-1| = |z| = 1$. Les représenter dans le plan.

Exercice 4

Soit $U = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$

1. Démontrer que si $z \in \mathbb{R}$ alors $\dfrac{1+iz}{1-iz} \in U$.
2. Etudier la réciproque.

Exercice 5

Soit a, b, c, d des complexes tels que

$$a + c = b + d,$$

et

$$a + ib = c + id.$$

Montrer que les points d'affixes a, b, c, d forment un carré.

Exercice 6

On note, pour $0 \leq i \leq 2, S_i = \displaystyle\sum_{k=i[3]} \binom{n}{k}$. Calculer S_i. On pourra utiliser j.

Exercice 7

Anneau des entiers de GaussOn appelle anneau des entiers de Gauss, noté $\mathbb{Z}[i]$, l'ensemble des complexes de la forme $a + ib$, où a et b sont des entiers relatifs.

1. Soit $z, z' \in \mathbb{Z}[i]$. Montrer que 1, $z - z'$ et zz' sont des entiers de Gauss. On a muni $\mathbb{Z}[i]$ d'une structure dite "d'anneau", qui sera étudiée plus tard dans l'année.
2. Si z et z' sont dans $\mathbb{Z}[i]$, on note $N(z\bar{z'}) = zz'$. Montrer que $N(z\bar{z'})$ est un entier.
3. On dit qu'un entier de Gauss z est inversible si il existe un entier de gauss z' tel que $zz' = 1$. Déterminer les entiers de Gauss inversibles. Soit $n \in \mathbb{N}$. On dit qu'un entier est somme de deux carrés si il existe deux entiers a et b tels que $n = a^2 + b^2$.
4. Montrer, en utilisant les entiers de Gauss, que si n et n' sont sommes de deux carrés, alors nn' est somme de deux carrés.
5. Retrouver ce résultat sans utiliser les entiers de Gauss.

Une étude plus poussée des entiers de Gauss permet de les munir d'une division euclidienne, et ces derniers ont plein d'applications en théorie des nombres. En particulier, ils ont permis à Gauss de démontrer, à seulement 18 ans, qu'un nombre est somme de deux carrés si et seulement si ses facteurs premiers congrus à 3 modulo 4 interviennent avec un exposant pair.

Il n'est pas nécessaire de traiter tous les exercices pour obtenir la note maximale. Réussir quelques exercices avec honnêteté, en montrant une bonne connaissance du cours et une bonne capacité à dialoguer suffit à obtenir une excellente note. Il est possible d'obtenir une correction de certains exercices, en me contactant par mail.

Exercice 1

Calculer une racine carrée de $z_2 = 8 - 6i$.

Exercice 2

Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que $\dfrac{|z+1-2i|}{|z-1-i|} = 1$.

Exercice 3

Soient les ensembles $E = \{z \in \mathbb{C}, Im(z) > 0\}$ et $F = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$

1. Montrer que si $z \in E$ alors $\dfrac{z-i}{z+i} \in F$.
2. Etudier la réciproque.

Exercice 4

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(1+iz)^5 = (1-iz)^5$.

   Exprimer les solutions en fonction de $\tan\left(\dfrac{\pi}{5}\right)$ et $\tan\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$.
2. En déduire les valeurs de $\tan\left(\dfrac{\pi}{5}\right)$ et $\tan\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$.

Exercice 5

Chercher les complexes z vérifiant $z + \bar{z} = |z|$. Les représenter dans le plan.

Exercice 6

Anneau des entiers de GaussOn appelle anneau des entiers de Gauss, noté $\mathbb{Z}[i]$, l'ensemble des complexes de la forme $a + ib$, où a et b sont des entiers relatifs.

1. Soit $z, z' \in \mathbb{Z}[i]$. Montrer que 1, $z - z'$ et zz' sont des entiers de Gauss. On a muni $\mathbb{Z}[i]$ d'une structure dite "d'anneau", qui sera étudiée plus tard dans l'année.
2. Si z et z' sont dans $\mathbb{Z}[i]$, on note $N(z\bar{z'}) = zz'$. Montrer que $N(z\bar{z'})$ est un entier.
3. On dit qu'un entier de Gauss z est inversible si il existe un entier de gauss z' tel que $zz' = 1$. Déterminer les entiers de Gauss inversibles. Soit $n \in \mathbb{N}$. On dit qu'un entier est somme de deux carrés si il existe deux entiers a et b tels que $n = a^2 + b^2$.
4. Montrer, en utilisant les entiers de Gauss, que si n et n' sont sommes de deux carrés, alors nn' est somme de deux carrés.
5. Retrouver ce résultat sans utiliser les entiers de Gauss.

Une étude plus poussée des entiers de Gauss permet de les munir d'une division euclidienne, et ces derniers ont plein d'applications en théorie des nombres. En particulier, ils ont permis à Gauss de démontrer, à seulement 18 ans, qu'un nombre est somme de deux carrés si et seulement si ses facteurs premiers congrus à 3 modulo 4 interviennent avec un exposant pair.