Il n'est pas nécessaire de traiter tous les exercices pour obtenir la note maximale. Réussir quelques exercices avec honnêteté, en montrant une bonne connaissance du cours et une bonne capacité à dialoguer suffit à obtenir une excellente note. Il est possible d'obtenir une correction de certains exercices, en me contactant par mail.

Exercice 1

Soit f une application de E dans F, A et B des parties de F. Que dire de l'image réciproque de $A \cup B$ par f ? Et de celle de $A \cap B$?

Exercice 2

Soit $f : E \longrightarrow E$ une application vérifiant $f \circ f \circ f = f$. Montrer qu'elle est injective si et seulement si elle est surjective.

Exercice 3

Soient les ensembles $E = \{z \in C, Im(z) > 0\}$ et $F = \{z \in C, |z| < 1\}$
Montrer que $f : z \mapsto \dfrac{z-i}{z+i}$ réalise une bijection de E sur F.

Exercice 4

Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} f(x) = x^2+1, \forall x \in \mathbb{R}_+ \\ f(x) = -x^2+1, \forall x \in \mathbb{R}_- \end{cases}$ est bijective.
Etudier la continuité, le sens de variations et déterminer l'expression de sa réciproque.

Exercice 5

Soit E un ensemble. Montrez que E n'est jamais en bijection avec ses parties, d'abord dans le cas où E est un ensemble fini (facile), puis dans le cas où E est infini (difficile).

Il n'est pas nécessaire de traiter tous les exercices pour obtenir la note maximale. Réussir quelques exercices avec honnêteté, en montrant une bonne connaissance du cours et une bonne capacité à dialoguer suffit à obtenir une excellente note. Il est possible d'obtenir une correction de certains exercices, en me contactant par mail.

Exercice 1

Soit f une application de E dans F, A et B des parties de E. Que dire de l'image de $A \cup B$ par f ? Et de celle de $A \cap B$?

Exercice 2

Soit $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ une injection croissante. Montrer que $\varphi(n) \geq n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3

Soit $f : E \longrightarrow F$, montrez que f est bijective si et seulement si pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$, on a $f(A^c) = f(A)^c$.

Exercice 4

Soit $U = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$. Montrer que l'application f de $\mathbb{R}$ dans U définie par $f(x) = \dfrac{1+ix}{1-ix}$. est définie, et réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans U.

Exercice 5

Soit $f : \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}^*$ définie par $f(n,p) = 2^n(2p+1)$. Montrez que f est bijective. En déduire que pour tout n entier, $\mathbb{N}$ est en bijection avec $\mathbb{N}^n$.

Exercice 6

Soit $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{Q}$ définie par $f(p,q) = p + \frac{1}{q}$. Est-elle injective ? Surjective ?

Il n'est pas nécessaire de traiter tous les exercices pour obtenir la note maximale. Réussir quelques exercices avec honnêteté, en montrant une bonne connaissance du cours et une bonne capacité à dialoguer suffit à obtenir une excellente note. Il est possible d'obtenir une correction de certains exercices, en me contactant par mail.

Exercice 1

On suppose que $g \circ f$ est injective. Que dire ? Même question avec surjective.

Exercice 2

Donner une bijection $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}^*$.

Exercice 3

Montrer que $f : X \longrightarrow Y$ est injective si et seulement si pour toutes parties A et B de X, $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

Exercice 4

Soient les ensembles $E = \{z \in \mathbb{C}, Im(z) > 0\}$ et $F = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$

1. Montrer que l'application f de E dans F définie par $f(z) = \dfrac{z-i}{z+i}$ est bien définie, et réalise une bijection de E dans F.

Exercice 5

1. Soit $f(x) = \frac{x}{x+1}$ où x est un réel. Calculez $f \circ f \circ f \circ f.... \circ f(x)$ où l'on a composé $n \in \mathbb{N}$ fois, et où x est un réel quelconque.
2. Soit $f : E \longrightarrow E$ une application vérifiant $f \circ f \circ f = f$. Montrer qu'elle est injective si et seulement si elle est surjective.

Exercice 6

Soit $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ une application injective. Montrer que l'ensemble des $n \in \mathbb{N}$ tels que $\varphi(n) \geq n$ est infini.

Exercice 7

Soit $\varphi : \mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathcal{P}(E)$ croissante pour l'inclusion. Montrer qu'elle admet un point fixe, c'est à dire qu'il existe A dans $\mathcal{P}(E)$ telle que $\varphi(A) = A$. Remarque : pas facile.