Il n'est pas nécessaire de traiter tous les exercices pour obtenir la note maximale. Réussir quelques exercices avec honnêteté, en montrant une bonne connaissance du cours et une bonne capacité à dialoguer suffit à obtenir une excellente note. Il est possible d'obtenir une correction de certains exercices, en me contactant par mail.

Exercice 1

Montrer que pour $x \in [0; \frac{\pi}{2}]$, on a $\frac{2}{\pi}x \leq \sin(x) \leq x$. Faire un joli dessin.

Exercice 2

Dans tout l'exercice, I et J désignent des intervalles.

1. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe croissante et soit $g : J \to I$ une fonction convexe. Démontrer que $f \circ g$ est convexe.
2. Soit $f : I \to]0, +\infty[$. On dit que f est logarithmiquement convexe si $\ln f$ est convexe. Démontrer que si f est logarithmiquement convexe, alors f est convexe.
3. On suppose que pour tout $\alpha > 0$, f^α est convexe. On veut montrer que f est logarithmiquement convexe.
   (a) Pour $t \in [0,1]$, $x, y \in I$ et $\alpha \geq 0$, on pose $u(\alpha) = \exp\big(\alpha \ln f(tx + (1-t)y)\big)$ et $v(\alpha) = t\exp\big(\alpha \ln f(x)\big) + (1-t)\exp\big(\alpha \ln f(y)\big)$. Justifier que $u'(0) \leq v'(0)$.
   (b) Conclure.

Exercice 3

On note, pour $x \in \mathbb{R}, \mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ et $\mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

1. Dresser le tableau de variations de ch et sh.
2. Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $f_n(x) = \mathrm{ch}(x) \times \mathrm{ch}(\dfrac{x}{2}) \times \cdots \times \mathrm{ch}(\dfrac{x}{2^n})$.
   (a) Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^*, \mathrm{ch}(x) = \dfrac{\mathrm{sh}(2x)}{2\mathrm{sh}(x)}$.
   (b) En déduire la limite de $f_n(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$ (x étant fixé).

Exercice 4

On dit qu'une fonction f définie sur un intervalle $]a, b[$ est K-lipschitzienne, où $K > 0$ si pour tout $(x, y) \in]a, b[$, $|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$. Une telle fonction est dite lipschitzienne si il existe un tel $K > 0$. Montrer qu'une fonction convexe sur un intervalle $]a, b[$ est lipschitzienne sur tout sous segment de $]a, b[$.

Exercice 5

Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, x \mapsto (x^2 + 1)\mathrm{sh}(x)$.

1. Montrer que f est bijective. On note f^{-1} sa bijection réciproque.
2. Montrer que f^{-1} est impaire.
3. Montrer qu'elle est également dérivable.
4. On note Γ la courbe représentative de f^{-1} dans le plan. Donner une équation de sa tangente au point d'abscisse $e - \frac{1}{e}$.

Il n'est pas nécessaire de traiter tous les exercices pour obtenir la note maximale. Réussir quelques exercices avec honnêteté, en montrant une bonne connaissance du cours et une bonne capacité à dialoguer suffit à obtenir une excellente note. Il est possible d'obtenir une correction de certains exercices, en me contactant par mail.

Exercice 1

Montrer que, si $a_1, a_2....a_n$ sont des réels strictement positifs, alors $(a_1a_2...a_n)^{\frac{1}{n}} \leq \dfrac{a_1 + a_2... + a_n}{n}$.

Exercice 2

Soit f et g convexes sur un intervalle I. Que dire de $\max(f, g)$?

Exercice 3

Soit $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x^2 - y$.

1. f est-elle injective ? Surjective ?
2. Déterminer $f([0; 1]^2)$.
3. A-t-on $f^{-1}(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}^2$?

Exercice 4

Soit $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 1 - x^2e^x \end{array} \right.$

1. Montrez que f établit une bijection de $\mathbb{R}^+$ vers $]-\infty; 1]$.
   On note g la bijection induite par f de $\mathbb{R}^+$ vers $]-\infty; 1]$.
2. Déterminer le domaine de dérivabilité de g^{-1}.
3. Déterminer $(g^{-1})'(1 - e)$.

Exercice 5

On pose, pour x réel, $\text{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

1. Pour tout $y \in \mathbb{R}$, comparer $\text{sh}(y)$ et y.
2. Etudier la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\text{th}(x)}{x}$.
3. Soit $p \in \mathbb{R}$. Déterminer le nombre de solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $\text{th}(x) - px = 0$.

Exercice 6

On dit qu'une fonction f définie sur un intervalle $]a, b[$ est K-lipschitizenne, où $K > 0$ si pour tout $(x, y) \in]a, b[$, $|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$. Une telle fonction est dite lipschitzienne si il existe un tel $K > 0$. Montrer qu'une fonction convexe sur un intervalle $]a, b[$ est lipschitzienne sur tout sous segment de $]a, b[$.

Il n'est pas nécessaire de traiter tous les exercices pour obtenir la note maximale. Réussir quelques exercices avec honnêteté, en montrant une bonne connaissance du cours et une bonne capacité à dialoguer suffit à obtenir une excellente note. Il est possible d'obtenir une correction de certains exercices, en me contactant par mail.

Exercice 1

Montrer que $x \mapsto \ln(2+e^x)$ est convexe sur $\mathbb{R}$. En déduire que si $n \geq 2$, $a_1, ...a_n$ sont strictement positifs tels que $a_1....a_n = 1$, alors

$$3^n \leq \prod_{j=1}^{n}(2+a_j)$$

.

Exercice 2

1. Soit f convexe croissante ; montrer qu'elle est constante ou que $f \longrightarrow \infty$.
2. Soit f convexe sur $\mathbb{R}$. Montrer que si f admet un minimum local, c'est en fait un minimum global.
3. Que dire de la réciproque d'une fonction convexe croissante bijective ?

Exercice 3

On pose : $\mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ et $\mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$. Enfin, on note $\mathrm{th}(x) = \frac{sh(x)}{ch(x)}$.

1. Dresser rapidement le tableau de variations de ch et sh. Justifier alors que th est bien définie, et dresser son tableau de variations. Des trois fonctions, lesquelles sont bijectives ?
2. (a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^*, \mathrm{th}(x) = \dfrac{2}{\mathrm{th}(2x)} - \dfrac{1}{\mathrm{th}(x)}$.

   (b) En déduire la valeur de (S_n) définie pour tout $n \in N$ par : $S_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} 2^i \mathrm{th}(2^i x)$
3. Déterminer la bijection réciproque des fonctions bijectives déterminées en 1.

Exercice 4

Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, x \mapsto (x^2+1)\mathrm{sh}(x)$.

1. Montrer que f est bijective. On note f^{-1} sa bijection réciproque.
2. Montrer que f^{-1} est impaire.
3. Montrer qu'elle est également dérivable.
4. On note Γ la courbe représentative de f^{-1} dans le plan. Donner une équation de sa tangente au point d'abscisse $e - \frac{1}{e}$.

Exercice 5

On dit qu'une fonction f définie sur un intervalle $]a, b[$ est K-lipschitzienne, où $K > 0$ si pour tout $(x, y) \in]a, b[$, $|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$. Une telle fonction est dite lipschitzienne si il existe un tel $K > 0$. Montrer qu'une fonction convexe sur un intervalle $]a, b[$ est lipschitzienne sur tout sous segment de $]a, b[$.