Il n'est pas nécessaire de traiter tous les exercices pour obtenir la note maximale. Réussir quelques exercices avec honnêteté, en montrant une bonne connaissance du cours et une bonne capacité à dialoguer suffit à obtenir une excellente note. Il est possible d'obtenir une correction de certains exercices, en me contactant par mail.

Exercice 1

Classer les fonctions suivantes par ordre de négligeabilité en $+\infty$:

$$f_1(x) = x,\ f_2(x) = \exp(x),\ f_3(x) = \frac{1}{x},\ f_4(x) = 2,\ .$$

Exercice 2

Nous allons chercher un encadrement de la fonction $f : x \in]0;1[\longmapsto e^{\mathrm{sh}(x)}$.

1. Montrer que $\forall x \in]0;1[1 + x < f(x)$.
2. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{sh}(x) < \mathrm{ch}(x)$.
3. En déduire que $\forall x \in]0;1[, (1-x)\mathrm{ch}(x) < 1$.
4. En déduire que $\forall x \in]0;1[, f(x) < \frac{1}{1-x}$.

Exercice 3

Montrer que $x \mapsto \ln(2 + e^x)$ est convexe sur $\mathbb{R}$. En déduire que si $n \geq 2$, $a_1, ...a_n$ sont strictement positifs tels que $a_1....a_n = 1$, alors

$$3^n \leq \prod_{j=1}^{n} (2 + a_j)$$

.

Exercice 4

Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, x \mapsto (x^2 + 1)\mathrm{sh}(x)$.

1. Montrer que f est bijective. On note f^{-1} sa bijection réciproque.
2. Montrer que f^{-1} est impaire.
3. Montrer qu'elle est également dérivable.
4. On note Γ la courbe représentative de f^{-1} dans le plan. Donner une équation de sa tangente au point d'abscisse $e - \frac{1}{e}$.

Exercice 5

Dans tout l'exercice, I et J désignent des intervalles.

1. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe croissante et soit $g : J \to I$ une fonction convexe. Démontrer que $f \circ g$ est convexe.
2. Soit $f : I \to]0, +\infty[$. On dit que f est logarithmiquement convexe si $\ln f$ est convexe. Démontrer que si f est logarithmiquement convexe, alors f est convexe.
3. On suppose que pour tout $\alpha > 0$, f^α est convexe. On veut montrer que f est logarithmiquement convexe.
   (a) Pour $t \in [0,1]$, $x, y \in I$ et $\alpha \geq 0$, on pose $u(\alpha) = \exp\big(\alpha \ln f(tx + (1-t)y)\big)$ et $v(\alpha) = t\exp\big(\alpha \ln f(x)\big) + (1-t)\exp\big(\alpha \ln f(y)\big)$. Justifier que $u'(0) \leq v'(0)$.
   (b) Conclure.

Exercice 6

On dit qu'une fonction f définie sur un intervalle $]a, b[$ est K-lipschitizenne, où $K > 0$ si pour tout $(x, y) \in]a, b[$, $|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$. Une telle fonction est dite lipschitzienne si il existe un tel $K > 0$. Montrer qu'une fonction convexe sur un intervalle $]a, b[$ est lipschitzienne sur tout sous segment de $]a, b[$.

Il n'est pas nécessaire de traiter tous les exercices pour obtenir la note maximale. Réussir quelques exercices avec honnêteté, en montrant une bonne connaissance du cours et une bonne capacité à dialoguer suffit à obtenir une excellente note. Il est possible d'obtenir une correction de certains exercices, en me contactant par mail.

Exercice 1

Montrer que, si $a_1, a_2....a_n$ sont des réels strictement positifs, alors $(a_1a_2...a_n)^{\frac{1}{n}} \leq \dfrac{a_1 + a_2... + a_n}{n}$.

Exercice 2

Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On suppose que $f \xrightarrow{+\infty} +\infty$.

1. On suppose que $g =_{+\infty} o(f)$. Montrer que $\exp(g) =_{+\infty} o(\exp(f))$.
2. Montrer que la réciproque est fausse.
3. Application : comparer $f(x) = (\ln(\ln x))^{x^{\ln x}}$ et $g(x) = (\ln x)^{x^{\ln(\ln x)}}$ au voisinage de $+\infty$.

Exercice 3

Soit $f : t \longmapsto t + t^3$.

1. Tracer la courbe représentative de f, après étude de f.
2. Justifier que f admet une bijection réciproque, que l'on notera g.
3. Justifier que $g^3 + g = I_d$.
4. Donner les variations et la parité de g, ainsi que ses limites.
5. Tracer les courbes de f et g.
6. Montrer que g est dérivable. Donner sa dérivée en fonction de celle de g.
7. Justifier que g est $\mathcal{C}^\infty$.
8. Montrer que $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{g(x)}{x} = 1$.
9. Montrer que $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{g(x)}{x^{\frac{1}{3}}} = 1$.
10. Soit G la primitive de g s'annulant en 0. Montrer que $G = \frac{3}{4}g^4 + \frac{1}{2}g^2$. Montrer qu'elle est paire, puis donner son tableau de variations.

Exercice 4

Dans tout l'exercice, I et J désignent des intervalles.

1. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe croissante et soit $g : J \to I$ une fonction convexe. Démontrer que $f \circ g$ est convexe.
2. Soit $f : I \to]0, +\infty[$. On dit que f est logarithmiquement convexe si $\ln f$ est convexe. Démontrer que si f est logarithmiquement convexe, alors f est convexe.
3. On suppose que pour tout $\alpha > 0$, f^α est convexe. On veut montrer que f est logarithmiquement convexe.
   (a) Pour $t \in [0,1]$, $x, y \in I$ et $\alpha \geq 0$, on pose $u(\alpha) = \exp\big(\alpha \ln f(tx + (1-t)y)\big)$ et $v(\alpha) = t\exp\big(\alpha \ln f(x)\big) + (1-t)\exp\big(\alpha \ln f(y)\big)$. Justifier que $u'(0) \leq v'(0)$.
   (b) Conclure.

Exercice 5

On dit qu'une fonction f définie sur un intervalle $]a, b[$ est K-lipschitizenne, où $K > 0$ si pour tout $(x, y) \in]a, b[$, $|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$. Une telle fonction est dite lipschitzienne si il existe un tel $K > 0$. Montrer qu'une fonction convexe sur un intervalle $]a, b[$ est lipschitzienne sur tout sous segment de $]a, b[$.

Il n'est pas nécessaire de traiter tous les exercices pour obtenir la note maximale. Réussir quelques exercices avec honnêteté, en montrant une bonne connaissance du cours et une bonne capacité à dialoguer suffit à obtenir une excellente note. Il est possible d'obtenir une correction de certains exercices, en me contactant par mail.

Exercice 1

Classer les fonctions suivantes par ordre de négligeabilité en $+\infty$: $f_5(x) = \ln(x)$, $f_6(x) = \sqrt{x}\ln x$, $f_7(x) = \frac{e^x}{\sqrt{x}}$

Exercice 2

On note, pour $x \in \mathbb{R}, \mathrm{ch}(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$ et $\mathrm{sh}(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$.

1. Dresser le tableau de variations de ch et sh.
2. Montrer que $sh(x) < ch(x)$, et ce pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3. Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $f_n(x) = \mathrm{ch}(x) \times \mathrm{ch}(\dfrac{x}{2}) \times \cdots \times \mathrm{ch}(\dfrac{x}{2^n})$.
   (a) Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^*, \mathrm{ch}(x) = \dfrac{\mathrm{sh}(2x)}{2\mathrm{sh}(x)}$.
   (b) En déduire la limite de $f_n(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$ (x étant fixé).

Exercice 3

1. Soit f convexe croissante ; montrer qu'elle est constante ou que $f \longrightarrow \infty$.
2. Soit f convexe sur $\mathbb{R}$. Montrer que si f admet un minimum local, c'est en fait un minimum global.
3. Que dire de la réciproque d'une fonction convexe croissante bijective ?

Exercice 4

Dans tout l'exercice, I et J désignent des intervalles.

1. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe croissante et soit $g : J \to I$ une fonction convexe. Démontrer que $f \circ g$ est convexe.
2. Soit $f : I \to]0, +\infty[$. On dit que f est logarithmiquement convexe si $\ln f$ est convexe. Démontrer que si f est logarithmiquement convexe, alors f est convexe.
3. On suppose que pour tout $\alpha > 0$, f^α est convexe. On veut montrer que f est logarithmiquement convexe.
   (a) Pour $t \in [0,1]$, $x, y \in I$ et $\alpha \geq 0$, on pose $u(\alpha) = \exp\big(\alpha \ln f(tx + (1-t)y)\big)$ et $v(\alpha) = t\exp\big(\alpha \ln f(x)\big) + (1-t)\exp\big(\alpha \ln f(y)\big)$. Justifier que $u'(0) \leq v'(0)$.
   (b) Conclure.

Exercice 5

On dit qu'une fonction f définie sur un intervalle $]a, b[$ est K-lipschitizenne, où $K > 0$ si pour tout $(x, y) \in]a, b[$, $|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$. Une telle fonction est dite lipschitzienne si il existe un tel $K > 0$. Montrer qu'une fonction convexe sur un intervalle $]a, b[$ est lipschitzienne sur tout sous segment de $]a, b[$.