Il n'est pas nécessaire de traiter tous les exercices pour obtenir la note maximale. Réussir quelques exercices avec honnêteté, en montrant une bonne connaissance du cours et une bonne capacité à dialoguer suffit à obtenir une excellente note. Il est possible d'obtenir une correction de certains exercices, en me contactant par mail.

Exercice 1

Unicité de l'élément neutre et du symétrique dans un groupe. Symétrique de $x * y$. Preuves.

Exercice 2

1. Soit $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer que $th(x+y) = \frac{th(x)+th(y)}{1+th(x)th(y)}$.
2. Savez-vous comment retrouver les formules de trigonométrie hyperboliques à partir des formules de trigonométrie circulaires ?
3. Montrer que l'on définit une loi de groupe sur $G =]-1, 1[$ par $x * y = \frac{x+y}{1+xy}$.
4. Donner un isomorphisme $(\mathbb{R}, +) \longrightarrow (G, *)$

Exercice 3

Classer les fonctions suivantes par ordre de négligeabilité en $+\infty$:

$$f_1(x) = x,\ f_2(x) = \exp(x),\ f_3(x) = \frac{1}{x},\ f_4(x) = 2,\ .$$

Exercice 4

Nous allons chercher un encadrement de la fonction $f : x \in]0; 1[\longmapsto e^{\text{sh}(x)}$.

1. Montrer que $\forall x \in]0; 1[1 + x < f(x)$.
2. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \text{sh}(x) < \text{ch}(x)$.
3. En déduire que $\forall x \in]0; 1[, (1-x)\text{ch}(x) < 1$.
4. En déduire que $\forall x \in]0; 1[, f(x) < \frac{1}{1-x}$.

Exercice 5

Montrer que $x \mapsto \ln(2 + e^x)$ est convexe sur $\mathbb{R}$. En déduire que si $n \geq 2$, $a_1, ...a_n$ sont strictement positifs tels que $a_1....a_n = 1$, alors

$$3^n \leq \prod_{j=1}^{n} (2 + a_j)$$

.

Exercice 6

On dit qu'une fonction f définie sur un intervalle $]a, b[$ est K-lipschitizenne, où $K > 0$ si pour tout $(x, y) \in]a, b[$, $|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$. Une telle fonction est dite lipschitzienne si il existe un tel $K > 0$. Montrer qu'une fonction convexe sur un intervalle $]a, b[$ est lipschitzienne sur tout sous segment de $]a, b[$.

Il n'est pas nécessaire de traiter tous les exercices pour obtenir la note maximale. Réussir quelques exercices avec honnêteté, en montrant une bonne connaissance du cours et une bonne capacité à dialoguer suffit à obtenir une excellente note. Il est possible d'obtenir une correction de certains exercices, en me contactant par mail.

Exercice 1

1. Montrer que $H \subset (G, \cdot)$ est un groupe si et seulement si :
   (a) $H \neq \emptyset$
   (b) $\forall x, y \in H^2, xy^{-1} \in H$.
2. Montrer que si H_1 et H_2 sont des sous groupes de G, $H_1 \cap H_2$ en est un.

Exercice 2

Pour chacun des ensembles E et des lois de compositions internes suivants, donner un ensemble F qui le contient et qui est un groupe pour cette loi, puis déterminer si E en est un sous-groupe :

1. E est l'ensemble des entiers relatifs impairs pour la loi $+$.
2. E est l'ensemble des entiers relatifs impairs pour la loi $\times$.
3. $E = \{\frac{n}{2}, n \in \mathbb{Z}\}$ pour la loi $+$.
4. $E = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 2\}$ pour la loi $\times$.
5. $a \in \mathbb{R}$ étant fixé , $E = \{f \in F(\mathbb{R}; \mathbb{R}), f(a) = 0\}$ pour la loi $+$.
6. E est l'ensemble des suites réelles majorées pour la loi $+$.

Exercice 3

Montrer que, si $a_1, a_2....a_n$ sont des réels strictement positifs, alors $(a_1 a_2 ... a_n)^{\frac{1}{n}} \leq \dfrac{a_1 + a_2 ... + a_n}{n}$.

Exercice 4

Soit $f : t \longmapsto t + t^3$.

1. Tracer la courbe représentative de f, après étude de f.
2. Justifier que f admet une bijection réciproque, que l'on notera g.
3. Justifier que $g^3 + g = I_d$.
4. Donner les variations et la parité de g, ainsi que ses limites.
5. Tracer les courbes de f et g.
6. Montrer que g est dérivable. Donner sa dérivée en fonction de celle de g.
7. Justifier que g est $\mathcal{C}^\infty$.
8. Montrer que $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{g(x)}{x} = 1$.
9. Montrer que $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{g(x)}{x^{\frac{1}{3}}} = 1$.
10. Soit G la primitive de g s'annulant en 0. Montrer que $G = \frac{3}{4}g^4 + \frac{1}{2}g^2$. Montrer qu'elle est paire, puis donner son tableau de variations.

Il n'est pas nécessaire de traiter tous les exercices pour obtenir la note maximale. Réussir quelques exercices avec honnêteté, en montrant une bonne connaissance du cours et une bonne capacité à dialoguer suffit à obtenir une excellente note. Il est possible d'obtenir une correction de certains exercices, en me contactant par mail.

Exercice 1

Définition et propriétés d'un morphisme de groupes : écrivez ce qui vous vient, on rajoutera ce qu'il manque, et on en prouvera certaines.

Exercice 2

1. Soient H et H' deux sous groupes d'un groupe $(G, *)$.
   Démontrer que : $H \cup H'$ est un sous groupe de $(G, *) \Leftrightarrow H \subset H'$ ou $H' \subset H$.
2. Soit $(G, \cdot)$ un groupe. Montrer que $C(G) = \{x \in G, \forall y \in G, xy = yx\}$ est un sous-groupe de G.

Exercice 3

Classer les fonctions suivantes par ordre de négligeabilité en $+\infty$: $f_5(x) = \ln(x)$, $f_6(x) = \sqrt{x}\ln x$, $f_7(x) = \frac{e^x}{\sqrt{x}}$

Exercice 4

Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, x \mapsto (x^2+1)\text{sh}(x)$.

1. Montrer que f est bijective. On note f^{-1} sa bijection réciproque.
2. Montrer que f^{-1} est impaire.
3. Montrer qu'elle est également dérivable.
4. On note Γ la courbe représentative de f^{-1} dans le plan. Donner une équation de sa tangente au point d'abscisse $e - \frac{1}{e}$.

Exercice 5

On dit qu'une fonction f définie sur un intervalle $]a, b[$ est K-lipschitizenne, où $K > 0$ si pour tout $(x, y) \in]a, b[$, $|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$. Une telle fonction est dite lipschitzienne si il existe un tel $K > 0$. Montrer qu'une fonction convexe sur un intervalle $]a, b[$ est lipschitzienne sur tout sous segment de $]a, b[$.