Il n'est pas nécessaire de traiter tous les exercices pour obtenir la note maximale. Réussir quelques exercices avec honnêteté, en montrant une bonne connaissance du cours et une bonne capacité à dialoguer suffit à obtenir une excellente note. Il est possible d'obtenir une correction de certains exercices, en me contactant par mail.

Exercice 1

Rappeler et démontrer la formule d'une somme géométrique.

Exercice 2

Dans cet exercice, I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction de I à valeurs réelles. Exprimer verbalement les deux assertions suivantes :

1. $\forall x \in I, f(x) \neq 0$.
2. $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in I, f(x) = y$.

Maintenant, exprimer à l'aide de quantificateurs les deux expressions suivantes :

1. La fonction f ne prend jamais deux fois les mêmes valeurs.
2. La fonction f ne peut s'annuler qu'une fois.

Enfin, donner la négation des affirmations suivantes :

1. $\exists C \in \mathbb{R}, \forall x \in I, f(x) = C$.
2. $\forall x \in I, f(x) = 0 \implies x = 0$.

Exercice 3

Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant l'équation fonctionnelle suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) + xf(1-x) = 1 + x.$$

Exercice 4

Soit E un ensemble et A, B, C des parties de E. Démontrer :

1. $A \cap B = A \Leftrightarrow A \subset B$.
2. $A \cap B = A \cap C \Leftrightarrow A \cap \bar{B} = A \cap \bar{C}$.
3. $(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A) = (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)$.

Exercice 5

Les questions sont indépendantes.

1. Démontrer que la propriété $P(n)$: « $10^n + 1$ est divisible par 9 » est héréditaire. Est-elle vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$?
2. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$.

Il n'est pas nécessaire de traiter tous les exercices pour obtenir la note maximale. Réussir quelques exercices avec honnêteté, en montrant une bonne connaissance du cours et une bonne capacité à dialoguer suffit à obtenir une excellente note. Il est possible d'obtenir une correction de certains exercices, en me contactant par mail.

Exercice 1

Montrer que toute fonction $f : \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}$ s'écrit comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Exercice 2

Dans cet exercice, I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction de I à valeurs réelles. Exprimer verbalement les deux assertions suivantes :

1. $\forall x, y \in I, f(x) = f(y) \implies x = y$.
2. $x \leq y \implies f(x) \leq f(y)$.

Maintenant, exprimer à l'aide de quantificateurs les deux expressions suivantes :

1. La fonction f présente un minimum.
2. La fonction f est la fonction nulle.

Enfin, donner la négation des affirmations suivantes :

1. $\forall x \in I, f(x) > 0 \implies x > 0$.
2. $\forall x, y \in I, f(x) = f(y) \implies x = y$.

Exercice 3

Soit E un ensemble et A, B, C des parties de E. Démontrer :

1. $A \cup B = A \Leftrightarrow B \subset A$.
2. $(A \backslash C) \cap (B \backslash C) = (A \cap B) \backslash C$.
3. $(A \backslash C) \cup (B \backslash C) = (A \cup B) \backslash C$.

Exercice 4

Soit E un ensemble, $A \subset E$ et $B \subset E$. On appelle indicatrice de A la fonction $\mathbf{1}_A$ définie sur E vérifiant $\mathbf{1}_A(x) = 1$ si $x \in A$, 0 sinon. De quels ensembles ces fonctions sont les indicatrices ?

1. $\min(\mathbf{1}_A, \mathbf{1}_B)$.
2. $\max(\mathbf{1}_A, \mathbf{1}_B)$.
3. $\mathbf{1}_A \mathbf{1}_B$.
4. $1 - \mathbf{1}_A$.
5. $\mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B$.

Exercice 5

Les questions sont indépendantes.

1. Montrer que $4^n - 1$ est divisible par 3 pour $n \geq 1$
2. Soit a un réel. Montrer que $(\forall \epsilon > 0, |a| < \epsilon) \implies a = 0$.

Il n'est pas nécessaire de traiter tous les exercices pour obtenir la note maximale. Réussir quelques exercices avec honnêteté, en montrant une bonne connaissance du cours et une bonne capacité à dialoguer suffit à obtenir une excellente note. Il est possible d'obtenir une correction de certains exercices, en me contactant par mail.

Exercice 1

Montrer que $\sqrt{2}$ est irationnel.

Exercice 2

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant l'équation fonctionnelle suivante :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x)f(y) - f(xy) = x + y.$$

Exercice 3

Soit E un ensemble et A, B, C des parties de E. Démontrer que :

1. $A \cup B = A \cap B \Leftrightarrow A = B$.
2. $(A \cap B \subset A \cap C$ et $A \cup B \subset A \cup C) \Rightarrow B \subset C$.
3. $(A \backslash C) \backslash (B \backslash C) = (A \backslash B) \backslash C = A \backslash (B \cup C)$.

Exercice 4

Montrer que, pour tout $x \geq 0$, $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x)$. Caractériser le cas d'égalité, et faire un joli dessin.

Exercice 5

Les deux questions sont indépendantes.

1. Démontrer que : $\forall (a; n) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{N}, (1+a)^n \geq 1 + na$.
2. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 4^n + 5$ est divisible par 3.

Exercice 6

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{n(n^2+1)}{2} \in \mathbb{N}$.