Préparation à l'agrégation

Option A

Chaînes de Markov

Matteo Miannay

Table des matières

1 Chaînes de Markov - Introduction

On s'intéresse ici aux chaînes de Markov sur des espaces au plus dénombrables. Ici, E sera donc fini ou dénombrable (une partie de $\mathbb{N}$ en somme). On appelle E l'espace d'état.

Définition 1 (Chaîne de Markov). *Soit (X_n) une suite de variables aléatoires à valeurs dans E. (X_n) est une chaîne de Markov si et seulement si pour tout $k \in \mathbb{N}, (x_0, \cdots, x_{k+1}) \in E^{k+2}$ tels que $\mathbb{P}(X_k = x_k, \cdots, X_0 = x_0) > 0$,*

$$\mathbb{P}(X_{k+1} = x_{k+1} | X_k = x_k, \cdots X_0 = x_0) = \mathbb{P}(X_{k+1} = x_{k+1} | X_k = x_k).$$

L'indice n représente le temps. Les chaînes de Markov sont donc en quelque sorte sans mémoire, c'est à dire qu'elles vérifient la propriété suivante : "le futur ne dépend que du présent", ou encore, conditionnellement au présent, passé et futur sont indépendants.

Définition 2 (Chaine de Markov homogène). *Une chaîne de Markov (X_n) est dite homogène dès que pour tout $k \in \mathbb{N}, x, y \in E$, $\mathbb{P}(X_{k+1} = x | X_k = y) = \mathbb{P}(X_1 = x | X_0 = y)$.*

Nous nous intéresserons dans ce qui suit qu'à des chaînes de Markov homogènes. Le résultat suivant est utile pour montrer rapidement que quelque chose est une chaîne de Markov.

Propriété 3. *(X_n) est une chaîne de Markov homogène si et seulement s'il existe une fonction f mesurable, une suite (U_n) de variables aléatoires indépendantes et indépendantes de X_0 telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $X_{n+1} = f(X_n, U_{n+1})$.*

Démonstration. Pour trouver f, méthode d'inversion (cf cours de Jean-Christophe Breton). Pour vérifier que c'est une chaîne de Markov, on l'écrit, et utilise le fait que U_{n+1} est indépendante de $X_0, \cdots X_n$. $\square$

Définition 4. *On appelle probabilité de transition entre les états $x, y \in E$ la quantité*

$$p_{x,y} = \mathbb{P}(X_{k+1} = y | X_k = x) = \mathbb{P}(X_1 = y | X_0 = x).$$

On a alors, par conditionnements successifs :

Propriété 5. *Si ν_0 désigne la loi de X_0, alors pour tout $x_0, \cdots, x_n \in E$, $\mathbb{P}(X_n = x_n, X_{n-1} = x_{n-1}, \cdots X_0 = x_0) = \nu_0(x_0) \prod_{i=0}^{n-1} p_{x_i, x_{i+1}}$.*

Définition 6 (Matrice de transition). *On appelle **matrice de transition** la matrice $\mathcal{P} = (p_{x,y})_{x,y \in E}$:*

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} p_{x_0,x_0} & p_{x_0,x_1} & p_{x_0,x_2} & \cdots \\ p_{x_1,x_0} & p_{x_1,x_1} & p_{x_1,x_2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

D'après le lemme précédent, la loi d'une chaîne de Markov est caractérisée par la loi ν_0 de X_0 et par sa matrice de transition.

Remarque 7. *C'est une grosse matrice : potentiellement infinie.*

Propriété 8. *$\mathcal{P}$ est une matrice stochastique. C'est à dire :*

1. *Pour tout $x, y \in E$, $0 \leq p_{x,y} \leq 1$.*

2. $\sum_{y \in E} p_{x,y} = 1$.

On sait alors que 1 *est valeur propre de* $\mathcal{P}$*, de vecteur propre associé* $(1, \cdots, 1)$

On donne dans ce qui suit quelques exemples importants, et non triviaux.

Exemple 9. *Ici,* $E = 0, 1$*. On passe de* 0 *à* 1 *avec probabilité* α*, de* 1 *à* 0 *avec probabilité* β*.Ecrire la matrice de transition, et le graphe associé.*

Solution

Exemple 10 (Marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}$)**.** $E = \mathbb{Z}$. $p_{x,y} = p$ *si* $y = x + 1$, $1 - p$ *si* $y = x - 1$. *Donner la matrice et le graphe associé.*

Solution

Remarque 11. *Une version plus élaborée :* (X_n) *une suite de variables aléatoires* $i.i.d$ *sur* $\mathbb{Z}^d$. $S_n = \sum_{k=0}^{n} X_k$ *est une chaîne de Markov homogène. Si* f *est la loi de* X_n*, alors* $P_{x,y} = f(y - x)$*. Avec quel* f *retrouve-t-on l'exemple précédent ?*

Solution

Exemple 12 (La ruine du joueur)**.** *A joue contre B à pile ou face, avec une pièce faisant pile avec probabilité* p*. Au départ, A possède* a *euros, B* b *euros. Ils possèdent donc en tout* $a+b$ *euros.* A *gagne un euro si le résultat est pile, sinon il perd un euro. Le jeu s'arrête quand l'un des joueurs est ruiné. Donner l'ensemble des états, la matrice de transition et le graphe.*

Solution

Exemple 13 (Le modèle de diffusion d'Ehrenfest)**.** *On dispose de deux urnes, A et B. Contenant à elles deux* $a \geq 1$ *boules.* X_n *est le nombre de boules dans l'urne* A *à l'instant* n*. A chaque instant, on choisit une boule de façon uniforme, et on la change d'urne. Donner l'ensemble des états, la matrice de transition et le graphe.*

Solution

2 La relation de Chapman-Kolmogorov

Derrière ce nom peut être un peu inquiétant, la propriété, simple et naturelle, qui relie les probabilités de transition en n étapes aux probabilités de transition en une étape.

On note donc $p_{i,j}^{(n)} = \mathbb{P}(X_n = x_j | X_0 = i)$. Alors $p_{i,j}^{(n)} = \mathcal{P}_{i,j}^n$.

Propriété 14. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(X_{nk})_{k \in \mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov de matrice de transition $\mathcal{P}^n$.*

Propriété 15 (Relation de Chapman-Kolmogorov)**.** *Soit $m, n \in \mathbb{N}$, $x_i, x_j \in E$. Alors :*

$$\mathbb{P}(X_{m+n} = j | X_0 = i) = \sum_{x_k \in E} \mathbb{P}(X_m = x_k | X_0 = x_i) P(X_n = x_j | X_0 = x_k)$$

La démonstration n'est que l'associativité du produit matriciel. La formule dit donc que pour aller de x_i à x_j en $m+n$ étapes, il faut aller de i à un certain x_k en m étapes, puis de x_k àx_j en n étapes.

On a alors les deux propriétés suivantes :

Propriété 16. *Soit $n \geq 0, r \geq 1$. Alors :*

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_{n+r} = x_r, \cdots X_{n+1} = x_1 | X_n = y_n, \cdots, X_0 = y_0) &= \mathbb{P}(X_r = x_r \cdots X_1 = x_1 | X_0 = y_n) \quad (1) \\ &= p_{y_n, x_1} \prod_{i=1}^{r-1} p_{x_i, x_{i+1}}. \quad (2) \end{aligned}$$

Tout ceci se réécrit plus formellement :

Propriété 17. *Soit A_- un élément de la tribu du passé $\mathcal{F}_{n-1} = \sigma(X_0, \cdots X_{n-1})$, et A_+ un élément de la tribu du futur $\sigma(X_{n+1}, \ldots)$, alors :*

$$\mathbb{P}(A_+ | A_-, X_n = x_n) = \mathbb{P}(A_+ | X_n = x_n).$$

3 Propriété de Markov forte

Le but de cette section est de généraliser les formules précédentes à des temps d'arrêts.

On fixe donc T un temps d'arrêt à valeur dans $[0, +\infty]$ adapté à (X_n).

On rappelle que $\mathcal{F}_\infty$ désigne la tribu engendrée par la réunion des $\mathcal{F}_n$, et que $A \in \mathcal{F}_\infty \in \mathcal{F}_T$ si pour tout $n \geq 0, A \cap [T = n] \in \mathcal{F}_n$.

On a alors :

Propriété 18 (Propriété de Markov forte)**.** *Si T est un temps d'arrêt à valeurs dans $[0, +\infty]$ adapté à la chaîne de Markov (X_n), d'ensemble d'états E et de matrice de transition $\mathcal{P}$, que $x \in E$ et $A \in \mathcal{F}_T$ sont tels que $\mathbb{P}(T < \infty, A, X_T = x) > 0$, alors :*

$$\begin{align} \mathbb{P}(X_{T+1} = x_1, \cdots, X_{T+r} = x_r | T < \infty, A, X_T = x) &= \mathbb{P}(X_1 = x_1, \cdots, X_r = x_r | X_0 = x) \tag{3} \\ &= p_{x,x_1} \prod_{i=1}^{r-1} p_{x_i,x_{i+1}}. \tag{4} \end{align}$$

Voici un corollaire très utile et essentiel :

Propriété 19. *Soit $T_x = \inf(n \geq 1, X_n = x)$. Conditionnellement à $[T_x < \infty]$, la suite (X_{T_x+n}) est une chaîne de Markov de matrice de transition $\mathcal{P}$ et d'état initial x. De plus, elle est indépendante de la tribu $\mathcal{F}_T$.*

4 Classification des états

Dans ce qui suit, on suppose, sans perte de généralité, que E est un sous ensemble de $\mathbb{N}$. On notera alors les états i, j plutôt que x_i, x_j.

Définition 20. *On dit que l'état j est accessible à partir de l'état i s'il existe un entier $n \geq 0$ tel que $p_{i,j}^{(n)} > 0$. On note $i \rightsquigarrow j$.*

Propriété 21. *La relation $\rightsquigarrow$ est réflexive et transitive.*

Propriété 22. *Sont équivalents :*

1. *$i \rightsquigarrow j$*
2. *Le processus partant de i passe par j avec probabilité strictement positive.*

Démonstration. Le sens direct est clair. Pour le sens retour, on montre la contraposée : Si pour tout $n \geq 0, p_{i,j}^{(n)} = 0$, avec A l'événement "le processus passe par j, $\mathbb{P}(A|X_0 = i) = \mathbb{P}(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (X_n = j) | X_0 = i) \leq \sum_{n \geq 0} P(X_n = j | X_0 = i) = 0$. □

Définition 23. *On dit que deux états i et j communiquent si $i \rightsquigarrow j$ et $j \rightsquigarrow i$. On note $i \longleftrightarrow j$.*

Propriété 24. *La relation $\longleftrightarrow$ est une relation d'équivalence. Ses classes d'équivalence sont les composantes fortement connexes du graphe de la chaîne de Markov. On les appelle parfois composantes irréductibles, ou classes irréductibles.*

Remarque 25. *Si $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont deux classes irréductibles distinctes, alors il est peut être possible d'aller de $\mathcal{C}_1$ à $\mathcal{C}_2$. Mais alors, on ne peut pas revenir en arrière.*

Remarque 26. *Les classes peuvent être réduites à un singleton : par exemple, dans le cas des états absorbants.*

Définition 27. *S'il y a une seule classe irréductible, c'est à dire que tous les états communiquent, alors on dit que la chaîne est irréductible.*

Exemple 28. *La marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$ est irréductible.*

Exemple 29. *Pour les deux matrices suivantes, donner les classes irréductibles :*

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \qquad \mathcal{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solution

5 Périodicité

Nous allons étudier dans quelles conditions le temps qui sépare deux retours au même état est ou n'est pas multiple d'un temps minimum.

Propriété 30 (Période)**.** *Soit $j \in E$. On appelle période de j, noté $d(j)$ la quantité $d(j) = pgcd(n \geq 1, p_{j,j}^{(n)} > 0)$. On dit, par convention, de $pgcd(\emptyset) = +\infty$.*
Si $d(j) = d \geq 2$, on dit que j est un état périodique de période d.Si $d(j) = 1$, l'état est dit apériodique. Une chaîne apériodique est une chaîne dont tous les états sont apériodiques.

Remarque 31. *Si $p_{i,i} > 0$, i est apériodique.*

Propriété 32. *Si i est périodique de période $d(i)$ finie, que $i \longleftrightarrow j$, alors j est périodique de période $d(i)$: la périodicité est un invariant de classe.*

Démonstration. On suppose que $i \longleftrightarrow j$. Soit alors n, m tels que $p_{i,j}^{(n)}$ et $p_{j,i}^{(m)} > 0$. Comme i est de période $d(i)$ finie, soit $s \geq 1$ (multiple de d) tel que $p_{i,i}^{(s)} > 0$. Alors $p_{j,j}^{(m+s+n)} \geq p_{j,i}^{(m)} p_{i,i}^{(s)} p_{i,j}^{(n)} > 0$. Comme $p_{i,i}^{(s)} > 0$, on a également $p_{i,i}^{(2s)} > 0$, et donc comme précédemment $p_{j,j}^{(m+2s+n)} > 0$. Donc la période $d(j)$ de j divise $m+s+n$ et $m+s+2n$ donc elle divise s. On a donc montré que $d(j)$ divise tout temps de retour en i, donc le pgcd des temps de retour en i, donc $d(i)$. Donc $d(j)$ divise $d(i)$. On montre de même que $d(i)$ divise $d(j)$ et donc $d(i) = d(j)$. □

Exemple 33. *Pour*

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ p & 0 & 1-p \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

, déterminer les classes récurrentes, et la période de chaque classe.

Solution

Exemple 34. *Même chose avec*

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

.

Solution

Exemple 35. *Même chose avec la marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$.*

Solution

6 Etats récurrents, états transients

Comme on l'a fait précédemment, on notera $T_j = \inf\{n \geq 1, X_n = j\}$. C'est un temps d'arrêt. On note aussi $N_j = \sum_{n \geq 0} \mathbf{1}_{X_n = j}$ le nombre de passages en j. On notera également pour tout événement A : $\mathbb{P}^j(A) = \mathbb{P}(A|X_0 = j)$. Cela revient à prendre comme loi initiale δ_j : on appelle cette chaîne la chaîne issue de j.

On a alors $\mathbb{P}^j(T_j < \infty) = \mathbb{P}^j(N_j > 1)$.

Définition 36 (Etat récurrent)**.** *On dit que l'état j est récurrent si la chaîne issue de j revient presque sûrement en j en un temps fini, c'est à dire $\mathbb{P}^j(T_j < \infty) = 1$. Sinon, l'état est dit transient, ou transitoire.*

Propriété 37. *Si j est récurrent, le nombre de passages en j en partant de j est presque sûrement infini : $\mathbb{P}^j(N_j = +\infty) = 1$, et à fortiori :$E^j(N_j) = +\infty$. Si j est transient, le nombre de passage en j en partant de j suit une loi géométrique. et est donc presque sûrement fini, et d'espérance finie. De plus, en partant de i quelconque, le nombre de passage en j transient est également finie d'espérance finie.*

On en déduit le corollaire suivant très utile :

Propriété 38. *1. j est récurrent ssi $\sum_{n \geq 0} p_{j,j}^{(n)}$ diverge.*

2. j est transient ssi $\sum_{n \geq 0} p_{j,j}^{(n)}$ converge.

Démonstration. On prouve 1 en calculant $\mathbb{E}^j(N_j)$ avec une permutation espérance série. On en déduit automatiquement 2 par contraposée. □

Exemple 39. *Les états absorbants.*

Exemple 40. *La marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$? Distinguer $p = \frac{1}{2}$ et $0 < p < 1$.*

Solution

Remarque 41. *On peut s'intéresser à la nature des états de la marche aléatoire sur $\mathbb{Z}^d$. En fait, le résultat montré précédemment reste vrai pour $d = 2$. Pour $d \geq 3$, c'est le contraire. C'est un superbe développement que vous pouvez trouver sur le site de Thomas Cavallazzi. Il y a beaucoup de recasages !*

Propriété 42. *La récurrence et la transience sont des propriétés de classe. On peut donc parler de classe transiente et de classe récurrente.*

Définition 43 (Classe close)**.** *Une classe $\mathcal{C}$ de l'espace d'états E est dite close si pour tout $j \notin \mathcal{C}, i \in \mathcal{C}$,$p_{i,j} = 0$.*

On a alors le théorème suivant :

Théorème 44. *L'espace d'états se partitionne en classes d'équivalences pour la communication.*

1. *Une classe non close est transiente.*
2. *Une classe close* ***finie*** *est récurrente.*

En particulier, pour les chaînes de Markov ***à espace d'états finis****, les classes récurrentes sont les classes closes, les classes transientes les classes non closes. De plus, une chaîne de Markov à* ***espaces d'états finis*** *admet au moins un état récurrent : on en déduit qu'une chaîne de Markov finie irréductible est récurrente.*

On en donne une esquisse de preuve :

Démonstration. Preuve du premier point : Soit $\mathcal{C}$ non close. Soit $i \in \mathcal{C}$, $j \notin \mathcal{C}$ tel que $p_{i,j} > 0$. Comme $j \notin \mathcal{C}$, $\mathbb{P}(X_n = j | X_0 = i) = 0$ quelque soit $n \in \mathbb{N}$. Donc $\mathbb{P}(T_i < \infty | X_0 = i) = 0$.

Donc $\mathbb{P}(T_i = +\infty | X_0 = i) \geq \mathbb{P}(T_i = +\infty | X_0 = i, X_i = j)\mathbb{P}(X_i = j | X_0 = i) = 1 \times p_{i,j} > 0$. Donc i transient, $\mathcal{C}$ transitoire. *Preuve du second point :* Soit $\mathcal{C}$ une classe close finie. On procède par l'absurde et on suppose que tous les états sont transitoires. Soit $i \in \mathcal{C}$. Partant de i, la chaîne reste dans $\mathcal{C}$, donc presque sûrement, $\displaystyle\sum_{j \in \mathcal{C}} N_j = +\infty$. On a une somme finie qui est presque sûrement infinie, donc il existe presque surement un terme de la somme infini : $\mathbb{P}^i(\exists j \in \mathcal{C}, N_j = +\infty) = 1$. Or, on a supposé que tous les états étaient transitoires donc $\mathbb{P}^i(N_j = +\infty) = 0$ pour tout $j \in \mathcal{C}$, ce qui est absurde : toute classe close d'une chaine finie est donc récurrente.

Enfin, une chaîne à espace d'états finis possède nécessairement une classe close. En effet, si on considère le graphe des classes de communication de E dont les arêtes sont données par l'existence d'un chemin d'une classe vers l'autre, il est acyclique par définition, et un graphe fini orienté acyclique admet nécessairement un puits, c'est à dire un sommet sans "sortie" : c'est cette classe qui nous fournit une classe close, qui est donc récurrente. □

Voici alors une recette de cuisine pour l'étude d'une chaîne de Markov à espace d'états fini :

Si la chaîne part d'un état récurrent, la classe est close et la chaîne y reste. Si elle part d'un état transitoire, au bout d'un temps fini presque surement elle sortira de sa classe, jusqu'à atteindre une classe récurrente, et y rester. En partant d'un état transitoire, on atteint presque sûrement un état récurrent. L'inverse est presque sûrement impossible.

Quelques contre exemples à étudier, sur $\mathbb{Z}$:

Exemple 45. $X_n = n$

Exemple 46. *La marche aléatoire biaisée, avec* $p > \frac{1}{2}$

Solution

Exemple 47. *Retour à la ruine du joueur : quels sont les états transitoires ? Récurrents ? On fixe* $N = a + b$ *la fortune totale. On note* $p_A^a = \mathbb{P}(T_0 < \infty X_0 = a)$ *la probabilité de ruine de* A *sachant que sa fortune initiale est* a*. Déterminer une formule de récurrence vérifiée par* p_A^a*, et puis calculer* p_A^a*. Faire de même avec* $m(a)$ *l'espérance de temps de jeu en partant de* a*.*

Solution

Exemple 48. *La marche aléatoire simple équilibrée sur $\mathbb{Z}^d$ est récurrente si $1 \leq d < 3$, transiente si $d \geq 3$. La preuve fait l'objet d'un beau développement, disponible sur le site de Thomas Cavallazzi, qui remplit les leçons de proba, séries, intégration. C'est le théorème de Polyà.*

7 Mesures, et loi de probabilités stationnaires

On identifiera les mesures μ sur $\mathbb{E}$ à des vecteurs lignes $\mu = (\mu_1, \cdots)$

Définition 49. *Soit μ une mesure sur E. On dit que c'est une mesure stationnaire, ou invariante, si $\mu = \mu\mathcal{P}$.*

Si ν est une loi invariante, alors si X_0 est de loi ν, X_n est de loi $\nu\mathcal{P}^n = \nu$. Ces lois sont intimement liées au comportement asymptotique. En effet, on a la propriété suivante :

Propriété 50. *Si (X_n) converge en loi vers ν, alors ν est une loi stationnaire.*

Démonstration. $\nu_0\mathcal{P}^n \longrightarrow \nu$ et $\nu_0\mathcal{P}^{n+1} = (\nu_0\mathcal{P}^n)\mathcal{P}- > \nu P = \nu$, donc ν est une loi invariante. □

On a la propriété suivante :

Propriété 51. *Les mesures stationnaires ne chargent que les états récurrents : si i est transient et ν stationnaire, $\nu(i) = 0$.*

Démonstration. $\nu = \nu\mathcal{P}^{(n)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc : $\nu(i) = \sum_j \nu(j)p_{j,i}^{(n)}$

Et si i est transitoire, $p_{j,i}^{(n)}$ tend vers zéro. Le théorème de convergence dominée s'applique (pourquoi ?) et conclut. □

Remarque 52. *En particulier, si tous les états sont transitoires, il n'y a pas de mesure de probabilité invariantes et donc pas de convergence en loi.*

Pour chercher des mesures invariantes, peut parfois utiliser les résultats suivants :

Définition 53. *Une mesure π est dite réversible pour $\mathcal{P}$ si pour tout $x, y \in E, \pi(x)p(x, y) = \pi(y)p(y, x)$*

Propriété 54. *Une mesure réversible est invariante.*

Exemple 55. *Mesure invariante pour la marche aléatoire à deux états ?*

Solution

Exemple 56. *Pour la marche aléatoire symétrique sur $\mathbb{Z}$? Effectuer une remarque.*

Solution

Appliquons tout ceci aux chaînes de Markov à espaces d'état fini :

8 Lois invariantes et comportement asymptotique des chaînes de Markov à espace d'état fini

Théorème 57 (Chaînes de Markov à espaces d'état fini : lois invariantes et convergence en loi)**.** *Soit (X_n) une chaîne de Markov sur un espace d'état E* ***fini****. Alors elle possède* ***au moins*** *une loi stationnaire. Si de plus (X_n) est* ***irréductible****, alors la loi de probabilité stationnaire est* ***unique****. On l'appelle ν, et alors $\nu(i) = \dfrac{1}{\mathbb{E}^i(T_i)}$ où T_i est le temps de retour en i. Si (X_n) est de plus* ***irréductible*** *et* ***apériodique****, alors $\mathcal{P}^n$ converge vers la matrice dont toutes les lignes sont constantes égales à ν. En particulier, quelle que soit ν_0, il y a convergence en loi de (X_n) vers ν*

Démonstration. C'est de l'algèbre linéaire, à travers notamment le théorème de Perron-Frobenius, et un développement ! □

Remarque 58. *Pour estimer la loi invariante, une solution est donc de calculer les puissances de $\mathcal{P}$, par exemple en la diagonalisant, et faire tendre n vers l'infini.*

Remarque 59. *La vitesse de convergence est exponentielle : $|P(X_n = i) - \nu(i)| \leq \alpha|\lambda|^n$ où $|\lambda|$ est la deuxième plus grande valeur propre de $\mathcal{P}$ en module, la première étant 1. On appelle ça le* ***trou spectral****.*

Remarque 60. *La convergence est en loi. On ne peut pas espérer de convergence presque sûre : cela reviendrait à avoir une chaîne constante à partir d'un certain rang.*

Remarque 61. *S'il n'y a qu'une classe récurrente et des états récurrents, alors en temps fini la chaîne vit dans cette classe récurrente, et donc il y a une unique mesure invariante qui a pour support la classe récurrente, et le théorème précédent s'applique également.*

Remarque 62. *S'il y a plusieurs classes récurrentes, elle admet pour chaque classe une loi invariante ayant pour support ladite classe. De plus, toute combinaison convexe de ces classes est une loi invariante, et en fait, ce sont les seules. Donc la dimension de l'espace propre associé à la valeur propre* 1 *est le nombre de classes récurrentes de la chaîne.*

Exemple 63. *Reprendre les exemples du modèle à deux états, et du modèle de diffusion d'Ehrenfest.*

Solution

Solution

Théorème 64 (Théorème ergodique, Théorème centrale limite). (X_n) *une chaine de Markov irréductible sur un espace d'état fini. Soit* μ *son unique loi invariante. On a alors presque sûrement :*

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(X_k) = \sum_{i\in E} \frac{f(i)}{\mathbb{E}^i(T_i)} = \int f d\mu.$$

De plus, $\sqrt{n}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(X_i) - \int f d\mu\right)$ *converge en loi vers une loi normale centrée.*

9 Retour au cas général

Ce qui suit n'a d'intérêt que quand E est infini.

Définition 65 (Temps d'attente moyen). *On définit le temps d'attente moyen $M_{i,j}$ par $M_{i,j} = \mathbb{E}(T_j|X_0 = i) = \sum_{n\geq 1} nP(T_j = n|X_0 = i) = \sum_{n\geq 1} nf_{i,j}$.*

Définition 66. *On appelle $M_{j,j}$ le temps de retour moyen en j, et $\frac{1}{M_{j,j}}$ la fréquence moyenne de retour en j. Si $M_{j,j} < +\infty$, on dit que l'état j est positif. Dans le cas contraire, on dit qu'il est nul.*

Propriété 67. *Un état transient est forcément nul.*

Propriété 68. *Si j transient, alors $P(T_j = +\infty|X_0 = j) > 0$ donc $M_{j,j} = +\infty$.*

Remarque 69. *Les états récurrents nuls sont entre les transients et les récurrents : ils sont récurrents, mais leur temps moyen de retour est infini comme les transients.*

Propriété 70. *Un état j récurrent est nul ssi $p_{j,j}^{(n)} \longrightarrow 0$.*

Démonstration. Long, et pas simple ! ! ! □

Remarque 71. *On a dit plus tôt qu'un état était récurrent ssi $\sum p_{j,j}^n$ diverge. Un état récurrent est donc positif si et seulement si la série diverge grossièrement : c'est une autre manière d'exprimer le fait que les états récurrents nuls sont entre les transients et les récurrents : si la série diverge grossièrement, on est récurrent positif, si la série diverge non grossièrement, récurrent nul, si elle converge, transient.*

Propriété 72. *La positivité est une propriété de classe. De même pour la nullité.*

Démonstration. $p_{i,j}^{(n_0)} > 0$, $p_{j,i}^{(n_1)} > 0$. Donc $p_{i,i}^{(n_0+n_1+m)} \geq p_{i,j}^{(n_0)} p_{j,j}^{(m)} p_{j,i}^{(n_1)}$. Donc en envoyant m en l'infini on voit que la nullité de i entraîne celle de j. □

Propriété 73. *Si E est fini, tous les états récurrents sont positifs.*

La théorie n'a donc d'intérêt que pour E quelconque. On fixe maintenant (X_n) une chaîne de Markov irréductible récurrente. Nous allons exhiber une mesure invariante. Dans cette partie, ce ne sera pas nécessairement une mesure de probabilité. Nous verrons que cette mesure est finie, et peut être choisie comme une mesure de proba, quand la chaîne est récurrente positive. Cette dernière sera unique.

Théorème 74. *Soit (X_n) irréductible récurrente. On note*

$$u_i^j = \mathbb{E}\left[\sum_{n\geq 0} \mathbf{1}_{X_n=j, n\leq T_i-1} | X_0 = i\right].$$

u_i^j compte alors le temps moyen passé en j avant de revenir en i. Alors ν_i définie par $\nu_i(j) = u_i^j$ est stationnaire, et vérifie $\nu_i(i) = 1, \nu_i(j) < \infty$ pour tout $j \in E$ et $\nu_i(E) = \mathbb{E}[T_i|X_0 = i]$. De plus, toutes les mesures invariantes sont proportionnelles. Donc, si la chaîne est ***irréductible récurrente positive,*** *$\nu_i(E) < \infty$ et* ***il existe une unique loi de probabilité stationnaire****, laquelle est donnée par*

$$\mu(i) = \frac{1}{M_{i,i}} = \frac{1}{\mathbb{E}(T_i|X_0 = i)}.$$

A l'inverse, si la chaîne est récurrente nulle, $\nu_i(E) = +\infty$ et il n'y a pas de mesure invariante.

Remarque 75. *u_i^j est le temps moyen que l'on passe en j entre deux passages en i.*

Démonstration. Très longue. □

Définition 76. *On définit* $N_n(j) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{1}_{X_k=j}$ *et* $F_n(j) = \frac{1}{n} N_n(j)$. $N_n(j)$ *est le nombre de passages en* j *dans l'intervalle de temps* $[0, n-1]$ *et* $F_n(j)$ *la fréquence associée.*

Si les (X_n) étaient iid, on pourrait appliquer la loi forte des grands nombres à la suite (F_n). C'est en fait le cas, en remplacant une éventuelle loi commune par une loi invariante.

Théorème 77. *Si* (X_n) *irréductible, alors* $F_n(j) \longrightarrow \frac{1}{M_{j,j}}$ *presque sûrement.*

On a alors les corollaires suivants :

Théorème 78. *Si une chaîne de Markov est irréductible, la suite* $\mathcal{P}^n$ *converge au sens de Césaro vers la matrice* π *dont toutes les lignes sont égales et vérifient* $\pi_{i,j} = \frac{1}{\mathbb{E}^j(T_j)}$. *Si la chaîne n'est pas positive, la limite est nulle. Si elle est récurrente positive, toutes les lignes de la matrice limite sont égales à l'unique probabilité invariante. De plus, si la suite est irréductible récurrente positive apériodique, il y a convergence au sens usuel, et donc en loi vers l'unique loi stationnaire.*

Démonstration. Le début est assez direct avec le théorème précédent. On admet la fin. □

Théorème 79 (Théorème ergodique)**.** *Si* (X_n) *est irréductible récurrente positive d'unique loi de probabilité invariante* μ, *alors pour toute fonction* f $\mu-$*intégrable :*

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(X_k) = \int f d\mu.$$

Démonstration. Vraie pour les étagées avec ce qui précède, donc pour toute fonction par convergence monotone. □

Ce théorème dit en d'autre mots que la moyenne de f temporelle sur une trajectoire est égale à la moyenne spatiale.