

Méthode BKW pour l'équation de Schrödinger : cas faiblement non linéaire

Analyse BKW multiphase

DONNART Titouan, HOSTEIN Matthias

25 Janvier 2023

Introduction

Travail fait pour le moment :

- ▶ Méthode BKW pour l'équation de Schrödinger linéaire : développement formel, construction de la solution approchée, justification du développement.
- ▶ Développement BKW faiblement non linéaire à une phase

Introduction

Travail fait pour le moment :

- ▶ Méthode BKW pour l'équation de Schrödinger linéaire : développement formel, construction de la solution approchée, justification du développement.
- ▶ Développement BKW faiblement non linéaire à une phase

Plan

Mise en place de l'analyse BKW multiphase

Systèmes résonants

Équations de transports

Résolution

Estimations d'erreurs

Hypothèses

Équation de Schrödinger générale :

$$i\varepsilon\partial_t u^\varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{2}\Delta u^\varepsilon = Vu^\varepsilon + \varepsilon^\alpha f(|u^\varepsilon|^2)u^\varepsilon$$

Hypothèses de notre étude :

- ▶ $\alpha = 1, V = 0, f : x \mapsto \lambda x^\sigma, \sigma \in \mathbb{N}, \lambda \in \mathbb{R}^*$.
- ▶ La donnée initiale est de la forme :

$$u^\varepsilon(0, x) = \sum_{j \in J_0} a_{0j}^\varepsilon(x) e^{\frac{i\phi_{0j}(x)}{\varepsilon}} \quad \text{où } J_0 \text{ est au plus dénombrable.}$$

- ▶ On considère que les phases initiales sont linéaires :

$$\forall j \in \mathbb{N}, \exists \kappa_j \in \mathbb{R}^d \mid \forall x : \phi_{0j}(x) = \kappa_j \cdot x.$$

Hypothèses

Équation de Schrödinger générale :

$$i\varepsilon\partial_t u^\varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{2}\Delta u^\varepsilon = Vu^\varepsilon + \varepsilon^\alpha f(|u^\varepsilon|^2)u^\varepsilon$$

Hypothèses de notre étude :

- ▶ $\alpha = 1$, $V = 0$, $f : x \mapsto \lambda x^\sigma$, $\sigma \in \mathbb{N}$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$.
- ▶ La donnée initiale est de la forme :

$$u^\varepsilon(0, x) = \sum_{j \in J_0} a_{0j}^\varepsilon(x) e^{\frac{i\phi_{0j}(x)}{\varepsilon}} \quad \text{où } J_0 \text{ est au plus dénombrable.}$$

- ▶ On considère que les phases initiales sont linéaires :

$$\forall j \in \mathbb{N}, \exists \kappa_j \in \mathbb{R}^d \mid \forall x : \phi_{0j}(x) = \kappa_j \cdot x.$$

Hypothèses

Équation de Schrödinger générale :

$$i\varepsilon\partial_t u^\varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{2}\Delta u^\varepsilon = Vu^\varepsilon + \varepsilon^\alpha f(|u^\varepsilon|^2)u^\varepsilon$$

Hypothèses de notre étude :

- ▶ $\alpha = 1$, $V = 0$, $f : x \mapsto \lambda x^\sigma$, $\sigma \in \mathbb{N}$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$.
- ▶ La donnée initiale est de la forme :

$$u^\varepsilon(0, x) = \sum_{j \in J_0} a_{0j}^\varepsilon(x) e^{\frac{i\phi_{0j}(x)}{\varepsilon}} \quad \text{où } J_0 \text{ est au plus dénombrable.}$$

- ▶ On considère que les phases initiales sont linéaires :

$$\forall j \in \mathbb{N}, \exists \kappa_j \in \mathbb{R}^d \mid \forall x : \phi_{0j}(x) = \kappa_j \cdot x.$$

Hypothèses sur la solution approchée

L'équation aux dérivées partielles étudiée est donc :

$$i\varepsilon \partial_t u^\varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{2} \Delta u^\varepsilon = \lambda \varepsilon |u^\varepsilon|^{2\sigma} u^\varepsilon$$

On cherche une solution approchée sous la forme :

$$u_{app}^\varepsilon(t, x) = \sum_{j \in J} a_j(t, x) e^{i \frac{\kappa_j \cdot x}{\varepsilon} - i \frac{|\kappa_j|^2 t}{2\varepsilon}}.$$

- On a déjà vu que :

$$\phi_j(t, x) = \kappa_j \cdot x - \frac{|\kappa_j|^2 t}{2}$$

était la solution de l'équation eikonale dans le cas où la phase initiale était linéaire et lorsque l'on considérait qu'une seule phase lorsque $V \equiv 0$.

- J est un ensemble qui peut être strictement plus grand que J_0 à cause du phénomène de résonance (voir partie suivante)

Hypothèses sur la solution approchée

L'équation aux dérivées partielles étudiée est donc :

$$i\varepsilon \partial_t u^\varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{2} \Delta u^\varepsilon = \lambda \varepsilon |u^\varepsilon|^{2\sigma} u^\varepsilon$$

On cherche une solution approchée sous la forme :

$$u_{app}^\varepsilon(t, x) = \sum_{j \in J} a_j(t, x) e^{i \frac{\kappa_j \cdot x}{\varepsilon} - i \frac{|\kappa_j|^2 t}{2\varepsilon}}.$$

- On a déjà vu que :

$$\phi_j(t, x) = \kappa_j \cdot x - \frac{|\kappa_j|^2 t}{2}$$

était la solution de l'équation eikonale dans le cas où la phase initiale était linéaire et lorsque l'on considérait qu'une seule phase lorsque $V \equiv 0$.

- J est un ensemble qui peut être strictement plus grand que J_0 à cause du phénomène de résonance (voir partie suivante)

Plan

Mise en place de l'analyse BKW multiphase

Systèmes résonants

Équations de transports

Résolution

Estimations d'erreurs

Phénomène de résonance, illustration dans le cas cubique $\sigma = 1$

On a :

$$|u_{app}^\varepsilon|^2 u_{app}^\varepsilon = \sum_{k,l,m \in J} a_k \bar{a}_l a_m e^{\frac{i}{\varepsilon}(\phi_k - \phi_l + \phi_m)}.$$

Or, $\phi_k - \phi_l + \phi_m$ vérifie l'équation eikonale si et seulement si :

$$|\kappa_k - \kappa_l + \kappa_m|^2 = |\kappa_k|^2 - |\kappa_l|^2 + |\kappa_m|^2.$$

Cette condition est équivalente à :

$$(\kappa_l - \kappa_m) \cdot (\kappa_l - \kappa_k) = 0.$$

Si $d = 1$, alors nécessairement : $\kappa_l = \kappa_m$ ou $\kappa_l = \kappa_k$: il n'y a pas de nouvelles phases.

Condition de résonance dans le cas cubique ($\sigma = 1$)

Proposition

Supposons que $d \geq 2$. Soient $\kappa_k, \kappa_l, \kappa_m \in \mathbb{R}^d$, notons $\kappa_j = \kappa_k - \kappa_l + \kappa_m$ et supposons que $\kappa_l \neq \kappa_k$ et $\kappa_l \neq \kappa_m$. Alors :

$\phi_k - \phi_l + \phi_m = \phi_j$ si et seulement si les extrémités des vecteurs $\kappa_j, \kappa_k, \kappa_l, \kappa_m$ forment les 4 coins d'un rectangle non dégénéré avec κ_j et κ_l opposés.

Exemple ($\sigma = 1$)

- ▶ On considère : $\kappa_1 = (0, 1)$, $\kappa_2 = (1, 1)$, $\kappa_3 = (1, 0)$. Le seul mode créé est $\phi_0 = 0$.
- ▶ Cette création peut être dynamique, par exemple les phases créées peuvent interagir entre elles pour créer de nouvelles phases.

Ainsi avec ces deux exemples, on a une seule phase générée ou bien une infinité de phases générées.

Exemple ($\sigma = 1$)

- ▶ On considère : $\kappa_1 = (0, 1)$, $\kappa_2 = (1, 1)$, $\kappa_3 = (1, 0)$. Le seul mode créé est $\phi_0 = 0$.
- ▶ Cette création peut être dynamique, par exemple les phases créées peuvent interagir entre elles pour créer de nouvelles phases.

Ainsi avec ces deux exemples, on a une seule phase générée ou bien une infinité de phases générées.

Exemple ($\sigma = 1$)

- ▶ On considère : $\kappa_1 = (0, 1)$, $\kappa_2 = (1, 1)$, $\kappa_3 = (1, 0)$. Le seul mode créé est $\phi_0 = 0$.
- ▶ Cette création peut être dynamique, par exemple les phases créées peuvent interagir entre elles pour créer de nouvelles phases.

Ainsi avec ces deux exemples, on a une seule phase générée ou bien une infinité de phases générées.

Exemple ($\sigma = 1$)

- ▶ On considère : $\kappa_1 = (0, 1)$, $\kappa_2 = (1, 1)$, $\kappa_3 = (1, 0)$. Le seul mode créé est $\phi_0 = 0$.
- ▶ Cette création peut être dynamique, par exemple les phases créées peuvent interagir entre elles pour créer de nouvelles phases.

Ainsi avec ces deux exemples, on a une seule phase générée ou bien une infinité de phases générées.

Cas $\sigma \geq 2$

Dans le cas où $\sigma \geq 2$, on a :

$$|u_{app}^\varepsilon|^4 u_{app}^\varepsilon = \sum_{h,k,l,m,p \in J} a_h \overline{a_k} a_l \overline{a_m} a_p e^{\frac{i}{\varepsilon}(\phi_h - \phi_k + \phi_l - \phi_m + \phi_p)}.$$

Et $\phi_1 - \phi_2 + \phi_3 - \phi_4 + \phi_5$ résout l'équation eikonale si et seulement si :

$$(\kappa_1 - \kappa_2 + \kappa_3 - \kappa_4 + \kappa_5)^2 = \kappa_1^2 - \kappa_2^2 + \kappa_3^2 - \kappa_4^2 + \kappa_5^2.$$

Ex : Prenons $p, q \in \mathbb{Z}$, $p, q \neq 0$, $p \neq q$, et considérons :

$$(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \kappa_4, \kappa_5) = (pq, -q^2, -pq, p^2, p^2 - q^2).$$

Dans ce cas, on remarque que :

$$|\kappa_1|^2 - |\kappa_2|^2 + |\kappa_3|^2 - |\kappa_4|^2 + |\kappa_5|^2 = |\kappa_1 - \kappa_2 + \kappa_3 - \kappa_4 + \kappa_5|^2 = 0.$$

La résonance a créé un terme constant !

Plan

Mise en place de l'analyse BKW multiphase

Systèmes résonants

Équations de transports

Résolution

Estimations d'erreurs

Problème

Nous devons chercher les amplitudes a_j désormais. Comme on a différentes phases, on doit adapter le raisonnement précédent.

Pour $j \in J$, annuler le coefficient d'ordre ε donne :

$$\partial_t a_j + \kappa_j \cdot \nabla a_j = -i\lambda \sum_{\phi_{j_1} - \phi_{j_2} + \dots + \phi_{2\sigma+1} = \phi_j} a_{j_1} \overline{a_{j_2}} \dots a_{j_{2\sigma+1}}.$$

Condition de résonance :

$$(\kappa_{j_1}, \dots, \kappa_{j_{2\sigma+1}}) \in \mathcal{R}_j, \text{ où}$$

$$\mathcal{R}_j = \left\{ (\kappa_{j_l})_{1 \leq l \leq 2\sigma+1}, \sum_{l=1}^{2\sigma+1} (-1)^{l+1} \kappa_{j_l} = \kappa_j \text{ et } \sum_{l=1}^{2\sigma+1} (-1)^{l+1} |\kappa_{j_l}|^2 = |\kappa_j|^2 \right\}.$$

Résolution dans le cas $d = 1, \sigma = 1$.

On a vu que :

$$\mathcal{R}_j = \{(l, l, j), (j, l, l), l \in J_0\}.$$

Donc

$$\partial_t a_j + \kappa_j \cdot \nabla a_j = -2i\lambda \sum_{l \in J_0} |a_l|^2 a_j + i\lambda |a_j|^2 a_j.$$

Or on remarque que :

$$\partial_t |a_j|^2 + \kappa_j \partial_x |a_j|^2 = 0.$$

On obtient alors :

$$|a_j(t, x)|^2 = |a_{0j}(x - t\kappa_j)|^2.$$

Donc

$$a_j(t, x) = a_{0j}(x - t\kappa_j) e^{iS_j(t, x)} \text{ où } S_j \text{ est une phase indépendante de } \varepsilon.$$

Résolution dans le cas $d = 1, \sigma = 1$.

$$a_j(t, x) = a_{0j}(x - t\kappa_j)e^{iS_j(t, x)} \text{ où } S_j \text{ est une phase indépendante de } \varepsilon.$$

En réinjectant dans l'équation de transport, on obtient :

$$(\partial_t + \kappa_j \partial_x)S_j(t, x) = -2\lambda \sum_{l \in J_0} |a_{0l}(x - t\kappa_l)|^2 + \lambda |a_{0j}(x - t\kappa_j)|^2.$$

Donc on obtient :

$$S_j(t, x) = -2\lambda \sum_{l \in J_0 - \{j\}} \int_0^t |a_{0l}(x + (\tau - t)\kappa_j - \tau\kappa_l)|^2 d\tau - t\lambda |a_{0j}(x - t\kappa_j)|^2.$$

Discussion autour du cas général

- ▶ Dans le cas $d \geq 2$, on ne peut plus s'attendre à avoir $\partial_t |a_j|^2 + \kappa_j \cdot \nabla_x |a_j|^2 = 0$ pour tout $j \in J$. On a cependant une autre propriété, certes plus faible, mais bien connue des physiciens :

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{j \in J} \|a_j(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \right) = 0.$$

- ▶ Dans le cas $d = 1$, $\sigma \geq 2$, les ensembles \mathcal{R}_j deviennent plus compliqués, et on peut partir d'une amplitude $a_{00} \equiv 0$ pour avoir au final une amplitude $a_0(t, x)$ non-nulle, cf. le cas à 5 phases !

Discussion autour du cas général

- ▶ Dans le cas $d \geq 2$, on ne peut plus s'attendre à avoir $\partial_t |a_j|^2 + \kappa_j \cdot \nabla_x |a_j|^2 = 0$ pour tout $j \in J$. On a cependant une autre propriété, certes plus faible, mais bien connue des physiciens :

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{j \in J} \|a_j(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \right) = 0.$$

- ▶ Dans le cas $d = 1$, $\sigma \geq 2$, les ensembles \mathcal{R}_j deviennent plus compliqués, et on peut partir d'une amplitude $a_{00} \equiv 0$ pour avoir au final une amplitude $a_0(t, x)$ non-nulle, cf. le cas à 5 phases !

Plan

Mise en place de l'analyse BKW multiphase

Systèmes résonants

Équations de transports

Résolution

Estimations d'erreurs

Introduction d'un nouvel espace fonctionnel

Il n'est pas possible de faire, dans le cas multiphase, la même analyse que le groupe précédent.
L'espace fonctionnel X dans lequel nous devons raisonner doit donc vérifier :

- Invariance par translation :

$$\forall k \in \mathbb{R}^d, \forall f \in X, \quad \|\tau_k f\|_X = \|f\|_X,$$

- Algèbre de Banach :

$$\exists C > 0, \forall f, g \in X, \quad \|fg\|_X \leq C \|f\|_X \|g\|_X,$$

- Invariance par multiplication par une onde plane d'amplitude 1

$$\forall k \in \mathbb{R}^d, \forall f \in X, \quad \|fe_k\|_X = \|f\|_X, \quad \text{en notant } e_k : x \mapsto e^{ik \cdot x} \text{ avec } k \in \mathbb{R}^d.$$

- Continuité uniforme locale en temps de l'opérateur de Schrödinger :

$$\exists T_0 > 0, \exists C > 0, \forall t \in [0, T_0], \quad \|e^{i\frac{t}{2}\Delta}\|_{\mathcal{L}_c(X)} \leq C.$$

Ex : L'espace $\mathcal{FL}^1(\mathbb{R}^d) = \left\{ f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) \mid \hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d) \right\}$ vérifie ces 4 hypothèses.

Introduction d'un nouvel espace fonctionnel

Il n'est pas possible de faire, dans le cas multiphase, la même analyse que le groupe précédent.
L'espace fonctionnel X dans lequel nous devons raisonner doit donc vérifier :

- ▶ Invariance par translation :

$$\forall k \in \mathbb{R}^d, \forall f \in X, \quad \|\tau_k f\|_X = \|f\|_X,$$

- ▶ Algèbre de Banach :

$$\exists C > 0, \forall f, g \in X, \quad \|fg\|_X \leq C \|f\|_X \|g\|_X,$$

- ▶ Invariance par multiplication par une onde plane d'amplitude 1

$$\forall k \in \mathbb{R}^d, \forall f \in X, \quad \|fe_k\|_X = \|f\|_X, \quad \text{en notant } e_k : x \mapsto e^{ik \cdot x} \text{ avec } k \in \mathbb{R}^d.$$

- ▶ Continuité uniforme locale en temps de l'opérateur de Schrödinger :

$$\exists T_0 > 0, \exists C > 0, \forall t \in [0, T_0], \quad \|e^{i\frac{t}{2}\Delta}\|_{\mathcal{L}_c(X)} \leq C.$$

Ex : L'espace $\mathcal{FL}^1(\mathbb{R}^d) = \left\{ f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) \mid \hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d) \right\}$ vérifie ces 4 hypothèses.

Introduction d'un nouvel espace fonctionnel

Il n'est pas possible de faire, dans le cas multiphase, la même analyse que le groupe précédent.
L'espace fonctionnel X dans lequel nous devons raisonner doit donc vérifier :

- ▶ Invariance par translation :

$$\forall k \in \mathbb{R}^d, \forall f \in X, \quad \|\tau_k f\|_X = \|f\|_X,$$

- ▶ Algèbre de Banach :

$$\exists C > 0, \forall f, g \in X, \quad \|fg\|_X \leq C \|f\|_X \|g\|_X,$$

- ▶ Invariance par multiplication par une onde plane d'amplitude 1

$$\forall k \in \mathbb{R}^d, \forall f \in X, \quad \|fe_k\|_X = \|f\|_X, \quad \text{en notant } e_k : x \mapsto e^{ik \cdot x} \text{ avec } k \in \mathbb{R}^d.$$

- ▶ Continuité uniforme locale en temps de l'opérateur de Schrödinger :

$$\exists T_0 > 0, \exists C > 0, \forall t \in [0, T_0], \quad \|e^{i\frac{t}{2}\Delta}\|_{\mathcal{L}_c(X)} \leq C.$$

Ex : L'espace $\mathcal{FL}^1(\mathbb{R}^d) = \left\{ f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) \mid \hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d) \right\}$ vérifie ces 4 hypothèses.

Introduction d'un nouvel espace fonctionnel

Il n'est pas possible de faire, dans le cas multiphase, la même analyse que le groupe précédent.
L'espace fonctionnel X dans lequel nous devons raisonner doit donc vérifier :

- ▶ Invariance par translation :

$$\forall k \in \mathbb{R}^d, \forall f \in X, \quad \|\tau_k f\|_X = \|f\|_X,$$

- ▶ Algèbre de Banach :

$$\exists C > 0, \forall f, g \in X, \quad \|fg\|_X \leq C \|f\|_X \|g\|_X,$$

- ▶ Invariance par multiplication par une onde plane d'amplitude 1

$$\forall k \in \mathbb{R}^d, \forall f \in X, \quad \|fe_k\|_X = \|f\|_X, \quad \text{en notant } e_k : x \mapsto e^{ik \cdot x} \text{ avec } k \in \mathbb{R}^d.$$

- ▶ Continuité uniforme locale en temps de l'opérateur de Schrödinger :

$$\exists T_0 > 0, \exists C > 0, \forall t \in [0, T_0], \quad \|e^{i\frac{t}{2}\Delta}\|_{\mathcal{L}_c(X)} \leq C.$$

Ex : L'espace $\mathcal{FL}^1(\mathbb{R}^d) = \left\{ f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) \mid \hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d) \right\}$ vérifie ces 4 hypothèses.

Introduction d'un nouvel espace fonctionnel

Il n'est pas possible de faire, dans le cas multiphase, la même analyse que le groupe précédent.
L'espace fonctionnel X dans lequel nous devons raisonner doit donc vérifier :

- ▶ Invariance par translation :

$$\forall k \in \mathbb{R}^d, \forall f \in X, \quad \|\tau_k f\|_X = \|f\|_X,$$

- ▶ Algèbre de Banach :

$$\exists C > 0, \forall f, g \in X, \quad \|fg\|_X \leq C \|f\|_X \|g\|_X,$$

- ▶ Invariance par multiplication par une onde plane d'amplitude 1

$$\forall k \in \mathbb{R}^d, \forall f \in X, \quad \|fe_k\|_X = \|f\|_X, \quad \text{en notant } e_k : x \mapsto e^{ik \cdot x} \text{ avec } k \in \mathbb{R}^d.$$

- ▶ Continuité uniforme locale en temps de l'opérateur de Schrödinger :

$$\exists T_0 > 0, \exists C > 0, \forall t \in [0, T_0], \quad \|e^{i\frac{t}{2}\Delta}\|_{\mathcal{L}_c(X)} \leq C.$$

Ex : L'espace $\mathcal{FL}^1(\mathbb{R}^d) = \left\{ f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) \mid \hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d) \right\}$ vérifie ces 4 hypothèses.

Introduction d'un nouvel espace fonctionnel

Il n'est pas possible de faire, dans le cas multiphase, la même analyse que le groupe précédent. L'espace fonctionnel X dans lequel nous devons raisonner doit donc vérifier :

- ▶ Invariance par translation :

$$\forall k \in \mathbb{R}^d, \forall f \in X, \quad \|\tau_k f\|_X = \|f\|_X,$$

- ▶ Algèbre de Banach :

$$\exists C > 0, \forall f, g \in X, \quad \|fg\|_X \leq C \|f\|_X \|g\|_X,$$

- ▶ Invariance par multiplication par une onde plane d'amplitude 1

$$\forall k \in \mathbb{R}^d, \forall f \in X, \quad \|fe_k\|_X = \|f\|_X, \quad \text{en notant } e_k : x \mapsto e^{ik \cdot x} \text{ avec } k \in \mathbb{R}^d.$$

- ▶ Continuité uniforme locale en temps de l'opérateur de Schrödinger :

$$\exists T_0 > 0, \exists C > 0, \forall t \in [0, T_0], \quad \|e^{i\frac{t}{2}\Delta}\|_{\mathcal{L}_c(X)} \leq C.$$

Ex : L'espace $\mathcal{FL}^1(\mathbb{R}^d) = \left\{ f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) \mid \hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d) \right\}$ vérifie ces 4 hypothèses.

Existence et unicité d'une solution locale dans notre espace X

Sous les hypothèses précédentes sur notre espace fonctionnel, on a :

Lemme

Pour $d \geq 1$, si $u_0^\varepsilon \in X$, alors il existe $T^\varepsilon > 0$ et une unique solution $u^\varepsilon \in \mathcal{C}^0([0, T^\varepsilon], X)$ de l'équation de Schrödinger telle que $u^\varepsilon(0, \cdot) = u_0^\varepsilon$.

Preuve

On rappelle l'équation de Schrödinger à résoudre :

$$\begin{cases} i\varepsilon \partial_t u^\varepsilon(t, x) + \frac{\varepsilon^2}{2} \Delta u^\varepsilon(t, x) &= \lambda \varepsilon |u^\varepsilon(t, x)|^{2\sigma} u^\varepsilon(t, x), & \forall t \in [0, T^\varepsilon], \forall x \in \mathbb{R}^d, \\ u^\varepsilon(0, x) &= u_0^\varepsilon(x) & \forall x \in \mathbb{R}^d. \end{cases}$$

Le but est d'écrire cette équation comme un problème de point fixe, avec la formule de Duhamel :

$$u^\varepsilon(t, x) = e^{it\frac{\varepsilon}{2}\Delta} u_0^\varepsilon(x) - i\lambda \int_0^t e^{i(t-s)\frac{\varepsilon}{2}\Delta} |u^\varepsilon(s, x)|^{2\sigma} u^\varepsilon(s, x) ds.$$

On note alors :

$$\begin{aligned} \Phi &: \mathcal{C}^0([0, T^\varepsilon], X) \longrightarrow \mathcal{C}^0([0, T^\varepsilon], X) \\ u &\longmapsto t \mapsto e^{it\frac{\varepsilon}{2}\Delta} u_0^\varepsilon - i\lambda \int_0^t e^{i(t-s)\frac{\varepsilon}{2}\Delta} |u^\varepsilon(s)|^{2\sigma} u^\varepsilon(s) ds. \end{aligned}$$

Mise en garde et notations

Attention ! Notre T^ε pourrait tendre très vite vers 0 lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ si $\|u_0^\varepsilon\|_X$ n'est pas contrôlé uniformément en ε . Notons alors :

$$Y = \left\{ (a_j)_{j \in \mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}} \mid \|a\|_Y := \sum_{j \in \mathbb{N}} \|a_j\|_X < +\infty \right\}.$$

On a alors que si $(a_{0j})_{j \in \mathbb{N}} \in Y$, alors $u_0^\varepsilon \in X$ et $\|u_0^\varepsilon\|_X \leq \|a_0\|_Y$: majoration indépendante de ε .

Définissons également l'ensemble :

$$Y_2 = \left\{ (a_j)_{j \in \mathbb{N}} \in Y \mid \sum_{j \in \mathbb{N}} \left((1 + |\kappa_j|^2) \|a_j\|_X + \sqrt{1 + |\kappa_j|^2} \|\nabla a_j\|_X + \|\Delta a_j\|_X \right) < +\infty \right\},$$

qui nous servira pour les estimations d'erreur.

Existence et unicité de notre système d'équations de transport

Rappelons que nous avons obtenu ce système d'équations :

$$\partial_t a_j + \kappa_j \cdot \nabla a_j = -i\lambda \sum_{\phi_{j_1} - \phi_{j_2} + \dots + \phi_{2\sigma+1} = \phi_j} a_{j_1} \overline{a_{j_2}} \dots a_{j_{2\sigma+1}}.$$

Théorème

Pour $d \geq 1$, si $(a_{0j})_{j \in \mathbb{N}} \in Y$, alors il existe $T > 0$ et une unique solution $(a_j)_{j \in \mathbb{N}} \in \mathcal{C}^0([0, T]; Y)$ du système ci-dessus.

Si de plus $(a_{0j})_{j \in \mathbb{N}} \in Y_2$ alors $(a_j)_{j \in \mathbb{N}} \in \mathcal{C}^0([0, T]; Y_2)$.

Idée de la preuve pour le premier point

Il s'agit là encore d'appliquer un théorème de point fixe en remarquant que les solutions s'écrivent :

$$a_j(t, x) = a_{0j}(x - \kappa_j t) - i\lambda \sum_{(j_1, j_2, \dots, j_{2\sigma+1}) \in \mathcal{R}_j} \int_0^t (a_{j_1} \overline{a_{j_2}} \dots a_{j_{2\sigma+1}})(s, x - \kappa_j(t - s)) ds,$$

en utilisant les propriétés d'invariance par translation et d'algèbre de Banach.

Plan

Mise en place de l'analyse BKW multiphase

Systèmes résonants

Équations de transports

Résolution

Estimations d'erreurs

Récapitulatif du travail effectué

On a construit une solution approchée :

$$u_{app}^\varepsilon(t, x) = \sum_{j \in \mathbb{N}} a_j(t, x) e^{\frac{i\phi_j(t, x)}{\varepsilon}}.$$

Par définition elle vérifie :

$$i\varepsilon \partial_t u_{app}^\varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{2} \Delta u_{app}^\varepsilon = \lambda \varepsilon |u_{app}^\varepsilon|^{2\sigma} u_{app}^\varepsilon + r_1^\varepsilon + r_2^\varepsilon,$$

où :

- ▶ r_1^ε est le terme qui comprend que l'on a retrouvé que les phases résonantes.

$$r_1^\varepsilon = \lambda \varepsilon \sum_{j \in \mathbb{N}} \sum_{(j_1, \dots, j_{2\sigma+1}) \notin \mathcal{R}_j} a_{j_1} \overline{a_{j_2}} \dots a_{j_{2\sigma+1}} e^{\frac{i(\phi_{j_1} - \phi_{j_2} + \dots + \phi_{j_{2\sigma+1}})}{\varepsilon}}.$$

- ▶ r_2^ε correspond aux mêmes termes qu'il y avait au cas linéaire :

$$r_2^\varepsilon = \frac{\varepsilon^2}{2} \sum_{j \in \mathbb{N}} e^{\frac{i\phi_j}{\varepsilon}} \Delta a_j.$$

Récapitulatif du travail effectué

On a construit une solution approchée :

$$u_{app}^\varepsilon(t, x) = \sum_{j \in \mathbb{N}} a_j(t, x) e^{\frac{i\phi_j(t, x)}{\varepsilon}}.$$

Par définition elle vérifie :

$$i\varepsilon \partial_t u_{app}^\varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{2} \Delta u_{app}^\varepsilon = \lambda \varepsilon |u_{app}^\varepsilon|^{2\sigma} u_{app}^\varepsilon + r_1^\varepsilon + r_2^\varepsilon,$$

où :

- ▶ r_1^ε est le terme qui comprend que l'on a retrouvé que les phases résonantes.

$$r_1^\varepsilon = \lambda \varepsilon \sum_{j \in \mathbb{N}} \sum_{(j_1, \dots, j_{2\sigma+1}) \notin \mathcal{R}_j} a_{j_1} \overline{a_{j_2}} \dots a_{j_{2\sigma+1}} e^{\frac{i(\phi_{j_1} - \phi_{j_2} + \dots + \phi_{j_{2\sigma+1}})}{\varepsilon}}.$$

- ▶ r_2^ε correspond aux mêmes termes qu'il y avait au cas linéaire :

$$r_2^\varepsilon = \frac{\varepsilon^2}{2} \sum_{j \in \mathbb{N}} e^{\frac{i\phi_j}{\varepsilon}} \Delta a_j.$$

Estimation d'erreur

- ▶ On note $w^\varepsilon = u^\varepsilon - u_{app}^\varepsilon$, l'estimation d'erreur.
- ▶ Elle vérifie :

$$i\varepsilon \partial_t w^\varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{2} \Delta w^\varepsilon = \lambda \varepsilon (|u^\varepsilon|^{2\sigma} u^\varepsilon - |u_{app}^\varepsilon|^{2\sigma} u_{app}^\varepsilon) - r_1^\varepsilon - r_2^\varepsilon, \text{ et } w^\varepsilon|_{t=0} = 0.$$

D'après la formule de Duhamel :

$$\begin{aligned} w^\varepsilon(t) = & -i\lambda \int_0^t e^{i\varepsilon \frac{t-s}{2} \Delta} (|u^\varepsilon|^{2\sigma} u^\varepsilon - |u_{app}^\varepsilon|^{2\sigma} u_{app}^\varepsilon) \\ & + \frac{i}{\varepsilon} \int_0^t e^{i\varepsilon \frac{t-s}{2} \Delta} r_1^\varepsilon(s) \, ds + \frac{i}{\varepsilon} \int_0^t e^{i\varepsilon \frac{t-s}{2} \Delta} r_2^\varepsilon(s) \, ds. \end{aligned}$$

Estimation d'erreur

- ▶ On note $w^\varepsilon = u^\varepsilon - u_{app}^\varepsilon$, l'estimation d'erreur.
- ▶ Elle vérifie :

$$i\varepsilon \partial_t w^\varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{2} \Delta w^\varepsilon = \lambda \varepsilon (|u^\varepsilon|^{2\sigma} u^\varepsilon - |u_{app}^\varepsilon|^{2\sigma} u_{app}^\varepsilon) - r_1^\varepsilon - r_2^\varepsilon, \text{ et } w^\varepsilon|_{t=0} = 0.$$

D'après la formule de Duhamel :

$$\begin{aligned} w^\varepsilon(t) = & -i\lambda \int_0^t e^{i\varepsilon \frac{t-s}{2} \Delta} (|u^\varepsilon|^{2\sigma} u^\varepsilon - |u_{app}^\varepsilon|^{2\sigma} u_{app}^\varepsilon) \\ & + \frac{i}{\varepsilon} \int_0^t e^{i\varepsilon \frac{t-s}{2} \Delta} r_1^\varepsilon(s) ds + \frac{i}{\varepsilon} \int_0^t e^{i\varepsilon \frac{t-s}{2} \Delta} r_2^\varepsilon(s) ds. \end{aligned}$$

Estimation d'erreur

En utilisant les propriétés de l'espace X , on obtient (où C est une constante indépendante de ε) :

$$\begin{aligned} \|w^\varepsilon(t)\|_X &\leq |\lambda| C \int_0^t \left\| e^{i\varepsilon \frac{t-s}{2} \Delta} (|u^\varepsilon|^{2\sigma} u^\varepsilon - |u_{app}^\varepsilon|^{2\sigma} u_{app}^\varepsilon) \right\|_X ds \\ &\quad + \frac{C}{\varepsilon} \sum_{j=1,2} \left\| \int_0^t e^{i\varepsilon \frac{t-s}{2} \Delta} r_j^\varepsilon(s) ds \right\|_X . \end{aligned}$$

Erreur en r_2

Lemme

On a :

$$\sup_{t \in [0, T]} \left\| \int_0^t e^{i\varepsilon \frac{t-s}{2} \Delta} r_2^\varepsilon(s) ds \right\|_X = \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

Erreur en r_1 : lemme préliminaire

$$r_1^\varepsilon = \lambda \varepsilon \sum_{j \in \mathbb{N}} \sum_{(j_1, \dots, j_{2\sigma+1}) \notin \mathcal{R}_j} a_{j_1} \overline{a_{j_2}} \dots a_{j_{2\sigma+1}} e^{\frac{i(\phi_{j_1} - \phi_{j_2} + \dots + \phi_{j_{2\sigma+1}})}{\varepsilon}}.$$

On veut évaluer l'erreur du terme en r_1 , pour cela on remarque que r_1 est une somme de termes de la forme (sinon ils résonneraient) :

$$g(t, x) e^{i \frac{k \cdot x}{\varepsilon} - \frac{i \omega t}{2\varepsilon}} \quad \text{avec} \quad |k|^2 \neq \omega.$$

Erreur en r_1 : lemme préliminaire

Lemme

Soient $k \in \mathbb{R}^d$, $w \in \mathbb{R}$ qui vérifient : $|k|^2 \neq \omega$. On définit :

$$D^\varepsilon(t, x) = \int_0^t e^{i\varepsilon \frac{t-s}{2} \Delta} (g(s, x) e^{i \frac{k \cdot x}{\varepsilon} - \frac{i\omega s}{2\varepsilon}}) ds.$$

Alors, on a :

$$\begin{aligned} D^\varepsilon(t, x) = & - \frac{2i\varepsilon}{|k|^2 - \omega} \left[e^{i\varepsilon \frac{t-s}{2} \Delta} g(s, x) e^{i \frac{k \cdot x}{\varepsilon} - \frac{i\omega s}{2\varepsilon}} \right]_0^t \\ & + \frac{2i\varepsilon}{|k|^2 - \omega} \int_0^t e^{i\varepsilon \frac{t-s}{2} \Delta} e^{i \frac{k \cdot x}{\varepsilon} - \frac{i\omega s}{2\varepsilon}} \left(\frac{i}{2} (\varepsilon \Delta g + 2k \cdot \nabla g) + \partial_t g \right) (s, x) ds. \end{aligned}$$

Estimation de l'erreur en r_1

Proposition

Soient $k \in \mathbb{R}^d$, $\omega \in \mathbb{R}$ qui vérifient : $|k|^2 \neq \omega$. On a (où C est une constante indépendante de ε) :

$$\|D^\varepsilon(t)\|_X \leq \frac{C\varepsilon}{\left||k^2| - \omega\right|} \left(\|g\|_{L^\infty([0,t],X)} + \|\Delta g\|_{L^\infty([0,t],X)} \right. \\ \left. + |k| \|\nabla g\|_{L^\infty([0,t],X)} + \|\partial_t g\|_{L^\infty([0,t],X)} \right).$$

Estimation de l'erreur : conclusion

Théorème

Soit $d \geq 1, \kappa_j \in \mathbb{Z}^d$ et $(a_{0j}) \in Y_2$. Alors pour T garantissant l'existence et l'unicité de u_{app}^ε , on a :

$$\|u^\varepsilon - u_{app}^\varepsilon\|_{L^\infty([0, T], X)} = \mathcal{O}(\varepsilon).$$