
COUPLAGE LEÇONS-DÉVELOPPEMENTS

HOSTEIN Matthias

3A Maths

ENS Rennes

Année 2023 - 2024

22 juillet 2024

1 Algèbre et géométrie

101. Groupe opérant sur un ensemble.

Exemples et applications.

- Théorèmes de Sylow et application à la classification des groupes d'ordre pq .
- Produit scalaire invariant et sous-groupes compacts de $GL_n(\mathbb{R})$.
- *Formule de Burnside et moments du nombre de points fixes d'une permutation aléatoire.*
- *Cardinal du cône nilpotent*

102. Groupe des nombres complexes de module 1. Racines de l'unité. Applications.

- Diagonalisation de la matrice circulante et suite de polygones.
- Polygones constructibles à la règle et au compas.

103. Conjugaison dans un groupe. Exemples de sous-groupes distingués et de groupes quotients. Applications.

- Théorèmes de Sylow et application à la classification des groupes d'ordre pq .
- Produit scalaire invariant et sous-groupes compacts de $GL_n(\mathbb{R})$.

104. Groupes finis. Exemples et applications.

- Théorèmes de Sylow et application à la classification des groupes d'ordre pq .
- Automorphismes de \mathfrak{S}_n .

105. Groupe des permutations d'un ensemble fini. Applications.

- Automorphismes de \mathfrak{S}_n .
- Permutations aléatoires (loi du nombre de cycles, moments du nombre de points fixes...)

106. Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E , sous-groupes de $GL(E)$. Applications.

- Point fixe de Kakutani et sous-groupes compacts de $GL_n(\mathbb{R})$
- Théorème de Cartan-Von Neumann.
- *Générateurs de $O(E)$ et $SO(E)$.*

108. Exemples de parties génératrices d'un groupe. Applications.

- Automorphismes de \mathfrak{S}_n .
- Générateurs de $O(E)$ et $SO(E)$.

120. Anneaux $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Applications.

- Version faible du théorème de la progression arithmétique.
- Applications en pagaille du théorème chinois dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. (cyclicité, idempotents, critère de Korselt...)

121. Nombres premiers. Applications.

- Version faible du théorème de la progression arithmétique.
- Fonction ζ et nombres premiers.

122. Anneaux principaux. Exemples et applications.

- Forme normale de Smith.
- Algorithme de Berlekamp.

123. Corps finis. Applications

- Algorithme de Berlekamp.
- Cardinal du cône nilpotent sur \mathbb{F}_q .
- *Norme et carrés dans \mathbb{F}_q .*

125. Extensions de corps. Exemples et applications.

- Norme dans une extension et application.
- Polygones constructibles à la règle et au compas.

127. Exemples de nombres remarquables. Exemples d'anneaux de nombres remarquables. Applications.

- Norme dans une extension et inversibles des anneaux d'entiers de corps de nombres.

- Polygones constructibles à la règle et au compas.
- 141. Polynômes irréductibles à une indéterminée. Corps de rupture. Exemples et applications.**
- Polygones constructibles à la règle et au compas.
 - Algorithme de Berlekamp.
- 142. PGCD et PPCM, algorithmes de calcul. Applications.**
- Forme normale de Smith.
 - Algorithme de Berlekamp.
- 144. Racines d'un polynôme. Fonctions symétriques élémentaires. Exemples et applications.**
- Formes de Hankel.
 - Norme dans une extension et inversibles des anneaux d'entiers de corps de nombres.
- 148. Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie). Rang. Exemples et applications.**
- Algorithme de Berlekamp.
 - Autour de la décomposition en valeurs singulières.
 - Sous-espaces de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ stables par translation.
 - *Réduction des normaux par le théorème spectral.*
- 149. Déterminant. Exemples et applications.**
- Norme dans une extension et application.
 - Déterminant de Cauchy et théorème de Müntz.
- 150. Polynômes d'endomorphisme en dimension finie. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.**
- Décomposition de Dunford/Jordan-Chevalley par la méthode de Newton.
- Diagonalisation de la matrice circulante et suite de polygones.
 - *Réduction des endomorphismes normaux par le théorème spectral.*
- 151. Sous-espaces stables par un endomorphisme ou une famille d'endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications.**
- Réduction des endomorphismes normaux par le théorème spectral.
 - Sous-espaces de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ stables par translation.
- 152. Endomorphismes diagonalisables en dimension finie.**
- Réduction des endomorphismes normaux par le théorème spectral.
 - Diagonalisation de la matrice circulante et suite de polygones.
 - *Décomposition de Dunford/Jordan-Chevalley par la méthode de Newton.*
- 153. Valeurs propres, vecteurs propres. Calculs exacts ou approchés d'éléments propres. Applications.**
- Théorème du min-max de Courant-Fischer et continuité du spectre des matrices symétriques/hermitiennes.
 - Théorème de Perron-Frobenius pour les matrices positives et irréductibles.
 - *Diagonalisation de la matrice circulante et suite de polygones.*
- 154. Exemples de décomposition de matrices. Applications.**
- Décomposition de Dunford/Jordan-Chevalley par la méthode de Newton.
 - Forme normale de Smith.
 - Autour de la décomposition en valeurs singulières.
- 155. Exponentielle de matrices. Applications.**

- Théorème de Cartan-Von Neumann.
 - Image de l'exponentielle matricielle sur \mathbb{R} et \mathbb{C} .
- 156. Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents.**
- Décomposition de Dunford/Jordan-Chevalley par la méthode de Newton.
 - Cardinal du cône nilpotent sur \mathbb{F}_q .
- 157. Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes.**
- Théorème du min-max de Courant-Fischer et continuité du spectre des matrices symétriques/hermitiennes.
 - Autour de la décomposition en valeurs singulières.
 - *Réduction des endomorphismes normaux par le théorème spectral.*
- 158. Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien (de dimension finie).**
- Théorème du min-max de Courant-Fischer et continuité du spectre des matrices symétriques/hermitiennes.
 - Réduction des endomorphismes normaux par le théorème spectral.
 - Générateurs de $O(E)$ et $SO(E)$.
- 159. Formes linéaires et dualité en dimension finie. Exemples et applications.**
- Théorème de Krein-Milman.
 - Sous-espaces de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ stables par translation.
 - *Formes de Hankel.*
- 161. Espaces vectoriels et espaces affines euclidiens : distances, isométries.**
- Produit scalaire invariant, point fixe de Kakutani et sous-groupes compacts de $GL_n(\mathbb{R})$.
 - Générateurs de $O(E)$ et $SO(E)$.
- 162. Systèmes d'équations linéaires; opérations élémentaires, aspects algorithmiques et conséquences théoriques.**
- Forme normale de Smith.
 - Accélération de la convergence des méthodes itératives.
- 170. Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité. Applications.**
- Formes de Hankel.
 - Générateurs de $O(q)$ et $SO(q)$.
- 171. Formes quadratiques réelles. Coniques. Exemples et applications.**
- Formes de Hankel.
 - Générateurs de $O(E)$ et $SO(E)$.
 - Lemme de Morse.
- 181. Convexité dans \mathbb{R}^n . Applications en algèbre et en géométrie.**
- Théorème de Krein-Milman.
 - Point fixe de Kakutani et sous-groupes compacts de $GL_n(\mathbb{R})$.
- 190. Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement.**
- Permutations aléatoires.
 - Cardinal du cône nilpotent sur \mathbb{F}_q .
- 191. Exemples d'utilisation de techniques d'algèbre en géométrie.**
- Polygones constructibles à la règle et au compas.
 - Produits scalaires invariants et sous-groupes compacts de $GL_n(\mathbb{R})$.

2 Analyse et probabilités

201. Espaces de fonctions. Exemples et applications.

- Théorèmes de Montel et de la représentation conforme.
- Distance sur $\mathcal{C}^\infty([0, 1])$ et théorème de Morgenstern.
- *Théorème de Müntz.*

203. Utilisation de la notion de compacité.

- Théorèmes de Montel et de la représentation conforme.
- Point fixe de Kakutani et sous-groupes compacts de $GL_n(\mathbb{R})$.

204. Connexité. Exemples d'applications.

- Image de l'exponentielle matricielle sur \mathbb{R} et \mathbb{C} .
- Théorème de la représentation conforme.

205. Espaces complets. Exemples et applications.

- Distance sur $\mathcal{C}^\infty([0, 1])$ et théorème de Morgenstern.
- Étude des opérateurs de Hilbert-Schmidt.
- L'algèbre de Wiener des séries de Fourier absolument convergentes et équations différentielles linéaires sur $\ell^1(\mathbb{Z})$.

206. Exemples d'utilisation de la notion de dimension finie en analyse.

- Analyse d'un schéma différences finies pour une EDP de réaction-diffusion.
- Critères de contrôlabilité des systèmes différentiels linéaires en dimension finie.
- *Théorème de Perron-Frobenius et chaînes de Markov.*
- *Théorème de Müntz.*

208. Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples.

- Étude des opérateurs de Hilbert-Schmidt.

- L'algèbre de Wiener des séries de Fourier absolument convergentes et équations différentielles linéaires sur $\ell^1(\mathbb{Z})$.
- Théorème de Fenchel-Rockafellar.

209. Approximation d'une fonction par des fonctions régulières. Exemples d'applications.

- Inégalité de Heisenberg.
- Théorème O de Hardy-Littlewood.
- *Équation de la chaleur sur le cercle.*
- *Théorème de Müntz.*

213. Espaces de Hilbert. Exemples d'applications.

- Étude des opérateurs de Hilbert-Schmidt.
- Échantillonnage de Shannon.

214. Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. Illustrations en analyse et en géométrie.

- Lemme de Morse.
- Théorème de Cartan-Von Neumann.
- *Image de l'exponentielle matricielle sur \mathbb{R} et \mathbb{C} .*

215. Applications différentiables définies sur un ouvert de \mathbb{R}^n . Exemples et applications.

- Lemme de Morse.
- Théorème de Cartan-Von Neumann.

218. Formules de Taylor. Exemples et applications.

- Analyse d'un schéma différences finies pour une EDP de réaction-diffusion.
- La méthode de la phase stationnaire.
- *Lemme de Morse.*
- *Théorème limite central.*

219. Extremums : existence, caractérisation, recherche. Exemples et applications.

- La courbe brachistochrone : existence.

- Théorème de Fenchel-Rockafellar.
- *Autour de la décomposition en valeurs singulières.*

220. Illustrer par des exemples la théorie des équations différentielles ordinaires.

- La courbe brachistochrone : unicité et solution.
- L'algèbre de Wiener des séries de Fourier absolument convergentes et équations différentielles linéaires sur $\ell^1(\mathbb{Z})$.
- *Critères de contrôlabilité des systèmes différentiels linéaires en dimension finie.*

221. Équations différentielles linéaires. Systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications.

- L'algèbre de Wiener des séries de Fourier absolument convergentes et équations différentielles linéaires sur $\ell^1(\mathbb{Z})$.
- Critères de contrôlabilité des systèmes différentiels linéaires en dimension finie.
- *Sous-espaces de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ stables par translation.*

223. Suites numériques. Convergence, valeurs d'adhérence. Exemples et applications.

- Théorème de réarrangement de Riemann.
- Ordres moyens de l'indicatrice d'Euler et des fonctions σ et τ .

224. Exemples de développements asymptotiques de suites et de fonctions.

- La méthode de la phase stationnaire.
- Ordres moyens de l'indicatrice d'Euler et des fonctions σ et τ .

226. Suites vectorielles et réelles définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples. Applications à la résolution approchée d'équations.

- Théorème de Perron-Frobenius et chaînes de Markov.

- Accélération de la convergence des méthodes itératives.
- *Diagonalisation de la matrice circulante et suite de polygones.*

228. Continuité, dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et applications.

- Distance sur $\mathcal{C}^\infty([0, 1])$ et théorème de Morgenstern.
- Sous-espaces de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ stables par translation.

229. Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications.

- La courbe brachistochrone : existence.
- Théorème de Fenchel-Rockafellar.

230. Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples.

- Théorème de réarrangement de Riemann.
- Ordres moyens de l'indicatrice d'Euler et des fonctions σ et τ .

234. Fonctions et espaces de fonctions Lebesgue-intégrables.

- Inégalité de Heisenberg.
- Échantillonnage de Shannon.
- Équation de la chaleur sur le cercle.

235. Problèmes d'interversion de symboles en analyse.

- Équation de la chaleur sur le cercle.
- Théorème O de Hardy-Littlewood.

236. Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables.

- La méthode de la phase stationnaire.
- La formule des compléments.

- 239. Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.**
- La méthode de la phase stationnaire.
 - La formule des compléments.
- 241. Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples.**
- Théorème O de Hardy-Littlewood.
 - Équation de la chaleur sur le cercle.
- 243. Séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications.**
- Théorème O de Hardy-Littlewood.
 - Théorème de Morgenstern.
- 244. Exemples d'études et d'applications de fonctions usuelles et spéciales.**
- La formule des compléments.
 - Fonction ζ et nombres premiers.
- 245. Fonctions holomorphes et méromorphes sur un ouvert de \mathbb{C} . Exemples et applications.**
- La formule des compléments.
 - Théorèmes de Montel et de la représentation conforme.
- 246. Séries de Fourier. Exemples et applications.**
- Équation de la chaleur sur le cercle.
 - L'algèbre de Wiener des séries de Fourier absolument convergentes.
- 250. Transformation de Fourier. Applications.**
- Inégalité de Heisenberg.
 - Échantillonnage de Shannon.
- 253. Utilisation de la notion de convexité en analyse.**
- La courbe brachistochrone : existence.
 - Théorème de Fenchel-Rockafellar.
 - *Théorème de Krein-Milman.*
- 261. Loi d'une variable aléatoire : caractérisations, exemples, applications.**
- Permutations aléatoires.
 - Théorème de Lévy, théorème limite central et intervalles de confiance asymptotiques.
- 262. Convergences d'une suite de variables aléatoires. Théorèmes limite. Exemples et applications.**
- Théorème de Lévy, théorème limite central et intervalles de confiance asymptotiques.
 - Théorème de Perron-Frobenius et convergence vers la mesure invariante d'une chaîne de Markov.
 - *Théorème limite central pour le nombre de cycles d'une permutation aléatoire.*
- 264. Variables aléatoires discrètes. Exemples et applications.**
- Théorème de Perron-Frobenius et convergence vers la mesure invariante d'une chaîne de Markov.
 - Permutations aléatoires.
- 266. Utilisation de la notion d'indépendance en probabilités.**
- Fonction ζ et nombres premiers.
 - Théorème de Lévy, théorème limite central et intervalles de confiance asymptotiques.