1.8 Théorème d'échantillonnage de Shannon (201, 213, 234, 250) [14]

De retour dans le merveilleux monde de la physique ! Parlons d'échantillonnage. Ce théorème est **le** théorème fondamental de la théorie de l'échantillonnage : il dit que si f est une fonction convenable (ici, L^2) telle que sa transformée de Fourier $\hat{f}$ ait un spectre en fréquence limité entre $-\omega_{\max}$ et $\omega_{\max}$, alors, f pourra être retrouvée par échantillonnage pour peu que la fréquence d'échantillonnage soit assez élevée : elle doit dépasser $2 \times f_{\max}$ où $f_{\max} = \dfrac{\omega_{\max}}{2\pi}$. Cela se traduit par le théorème suivant :

Théorème 1.18 (Shannon)**.** Pour $A > 0$, posons :

$$\mathrm{BL}^2_A := \left\{ f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}) \;\middle|\; \operatorname{supp}\left(\hat{f}\right) \subset [-A, A] \right\}$$

Alors :

1. $\left(\mathrm{BL}^2_A, \langle \cdot, \cdot \rangle\right)$ est un espace de Hilbert, où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire usuel de $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$.
2. Si φ_A désigne la fonction $\operatorname{sinc}(A\cdot)$, alors la famille $\left(\sqrt{\frac{A}{\pi}} \tau_{\frac{n\pi}{A}} \varphi_A\right)_{n \in \mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de BL^2_A.
3. Pour tout $f \in \mathrm{BL}^2_A$, on a :
$$f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f\left(\frac{n\pi}{A}\right) \tau_{\frac{n\pi}{A}} \varphi_A$$
où la série converge en norme L^2 mais également uniformément.

Démonstration. 1. Pour prouver ce point, il suffira de montrer que BL^2_A est fermé dans $\left(\mathrm{L}^2(\mathbb{R}), \|\cdot\|_2\right)$. Soit alors $(f_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \left(\mathrm{BL}^2_A\right)^{\mathbb{N}}$ une suite convergeant vers $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$. On a alors :

$$\|\hat{f}\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R} \setminus [-A,A])} = \|\hat{f} - \hat{f}_k\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R} \setminus [-A,A])} \leqslant \|\hat{f} - \hat{f}_k\|_2 = \sqrt{2\pi} \|f - f_k\|_2 \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0.$$

Ainsi $\hat{f}$ est nulle presque partout sur $\mathbb{R} \setminus [-A, A]$. Ainsi : $f \in \mathrm{BL}^2_A$, cela conclut ce premier point.

2. Montrons que cette famille est orthonormée. Pour cela, calculons innocemment la transformée de Fourier de la fonction porte $\mathbb{1}_{[-A,A]}$:

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^*, \quad \widehat{\mathbb{1}_{[-A,A]}}(\xi) = \int_{-A}^{A} e^{-ix\xi} \mathrm{d}x = \frac{1}{-i\xi} \left(e^{-iA\xi} - e^{iA\xi}\right) = 2A \frac{\sin(A\xi)}{A\xi} = 2A \varphi_A(\xi),$$

et cette formule se prolonge sans problème en $\xi = 0$. Ainsi, par formule d'inversion de Fourier L^2, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \widehat{\varphi_A}(x) = \frac{\pi}{A} \mathbb{1}_{[-A,A]}(x)$$

et donc :

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad \widehat{\tau_{\frac{n\pi}{A}} \varphi_A}(x) = \frac{\pi}{A} e^{-i \frac{n\pi}{A}} \mathbb{1}_{[-A,A]}(x).$$

Ainsi, par la formule de Plancherel, on obtient :

$$\forall m, n \in \mathbb{Z}, \quad \int_{\mathbb{R}} \tau_{\frac{n\pi}{A}} \varphi_A(x) \overline{\tau_{\frac{m\pi}{A}} \varphi_A(x)} \mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi} \int_{-A}^{A} \left(\frac{\pi}{A}\right)^2 e^{-i \frac{n\pi\xi}{A}} e^{i \frac{m\pi\xi}{A}} \mathrm{d}\xi = \frac{\pi}{2A^2} \times 2A \delta_{m,n} = \frac{\pi}{A} \delta_{m,n}.$$

Ainsi, la famille $\left(\sqrt{\frac{A}{\pi}} \tau_{\frac{n\pi}{A}} \varphi_A\right)_{n \in \mathbb{Z}}$ est une famille orthonormée de BL^2_A. Montrons qu'elle est totale par le critère de densité dans les espaces de Hilbert. Soit $f \in \mathrm{BL}^2_A$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad \left\langle \tau_{\frac{n\pi}{A}} \varphi_A, f \right\rangle = 0.$$

Montrons que $f = 0$ presque partout. Par la formule de Plancherel, on a :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad 0 = \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{\tau_{\frac{n\pi}{A}}\varphi_A(x)}\mathrm{d}x = \frac{1}{2A}\int_{-A}^{A} \hat{f}(\xi)e^{i\frac{n\pi\xi}{A}}\mathrm{d}\xi = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \hat{f}\left(\frac{A\zeta}{\pi}\right)e^{in\zeta}\mathrm{d}\zeta$$

par changement de variable $\zeta = \dfrac{\pi\xi}{A}$. Ainsi, en notant g la fonction $\hat{f}\left(\dfrac{A\cdot}{\pi}\right)$, on reconnaît :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad c_{-n}(g) = 0$$

où $c_n(g)$ désigne le n-ième coefficient de Fourier de la fonction $g \in \mathrm{L}^2(-\pi,\pi)$. Ainsi, par injectivité des coefficients de Fourier, on a que g est nulle presque partout sur $[-\pi,\pi]$, et donc que $\hat{f}$ est nulle presque partout sur $[-A,A]$. Or, $f \in \mathrm{BL}^2_A$ et donc $\hat{f}$ est déjà nulle presque partout en dehors de $[-A,A]$. En définitive, $\hat{f} = 0$ presque partout sur $\mathbb{R}$. Ainsi, par injectivité de la transformée de Fourier, f est nulle presque partout sur $\mathbb{R}$. La famille $\left(\sqrt{\frac{A}{\pi}}\tau_{\frac{n\pi}{A}}\varphi_A\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ est donc bien une base hilbertienne de BL^2_A !

3. Il faut d'abord montrer que cette écriture à un sens, et donc montrer qu'écrire $f\left(\dfrac{n\pi}{A}\right)$ a un sens ! Pour cela, montrons que tout $f \in \mathrm{BL}^2_A$ possède un représentant continu. Puisque $f \in \mathrm{BL}^2_A$, on a que $\hat{f} \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ et que $\hat{f}$ est nulle presque partout en dehors de $[-A,A]$. Ainsi, $\hat{f} \in \mathrm{L}^2(-A,A)$ et donc, pusiqu'on est en mesure finie, $\hat{f} \in \mathrm{L}^1(-A,A)$ et donc, en définitive, $\hat{f} \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$. Ainsi, par inversion de Fourier L^2, on a :

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\widehat{\hat{f}}(-x)$$

presque partout, mais étant donné que $\hat{f} \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, on a la description explicite de $\widehat{\hat{f}}$:

$$\widehat{\hat{f}}(-x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)e^{ix\xi}\mathrm{d}\xi \text{ presque partout.}$$

Ainsi :

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-A}^{A} \hat{f}(\xi)e^{ix\xi}\mathrm{d}\xi$$

pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, et la fonction au second membre est une fonction continue (et tendant vers 0). On identifiera donc f à cette fonction continue. Remarquons par ailleurs (cela servira par la suite) que, par inégalité de Cauchy-Schwarz et formule de Plancherel (encore ! Ça fait beaucoup là, non ?) :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |f(x)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\left\|\hat{f}\right\|_2 \times \sqrt{2A} = \sqrt{\frac{A}{\pi}}\|f\|_2$$

et donc :

$$\forall f \in \mathrm{BL}^2_A, \quad \|f\|_\infty \leqslant \sqrt{\frac{A}{\pi}}\|f\|_2.$$

On est prêt à conclure : puisque la famille $\left(\sqrt{\frac{A}{\pi}}\tau_{\frac{n\pi}{A}}\varphi_A\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de BL^2_A, on a, par la formule de Bessel-Parseval :

$$f = \frac{A}{\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \left\langle f, \tau_{\frac{n\pi}{A}}\varphi_A\right\rangle \tau_{\frac{n\pi}{A}}\varphi_A$$

où la série converge en norme L^2. Or, on a déjà calculé le produit scalaire dans la somme dans le point 2 ! Souvenez-vous, on avait :

$$\left\langle f, \tau_{\frac{n\pi}{A}}\varphi_A\right\rangle = \frac{1}{2A}\int_{-A}^{A} \hat{f}(\xi)e^{i\frac{n\pi\xi}{A}}\mathrm{d}\xi.$$

Or, par l'identification de f avec son représentant continu $\dfrac{1}{2\pi}\widehat{\hat{f}}(-\cdot)$, on a que cette expression est rigoureusement égale à $\frac{\pi}{A} \times f\left(\frac{n\pi}{A}\right)$! Ainsi, on a :

$$f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f\left(\frac{n\pi}{A}\right)\tau_{\frac{n\pi}{A}}\varphi_A$$

où la convergence est en norme L^2. Cependant, on a vu que si $f \in \mathrm{BL}_A^2$, alors :

$$\|f\|_\infty \leqslant \sqrt{\frac{A}{\pi}}\|f\|_2.$$

Ainsi, la convergence est également uniforme ! Cela conclut la démonstration.

$\square$

Remarque 1.8.1 (Ce que dit le rapport du jury). *Le rapport du jury indique que ce théorème traduit une isométrie. En fait, pour tout espace de Hilbert séparable H, si $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de H, alors l'application :*

$$\begin{array}{rccl} J & : & H & \longrightarrow & \ell^2(\mathbb{N}) \\ & & v & \longmapsto & (\langle v, e_n\rangle)_{n\in\mathbb{N}} \end{array}$$

est une isométrie bijective. Dans le cas de l'échantillonnage de Shannon, on a donc que l'application :

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{BL}_A^2 & \longrightarrow & \ell^2(\mathbb{Z}) \\ f & \longmapsto & \left(\sqrt{\frac{\pi}{A}} f\left(\frac{n\pi}{A}\right)\right)_{n\in\mathbb{Z}} \end{array}$$

est une isométrie bijective. C'est l'objet véritablement du théorème de Shannon ! Si f est à spectre borné dans $[-A, A]$, alors f est entièrement déterminée par ses valeurs en les $\frac{n\pi}{A}$ pour $n \in \mathbb{Z}$, ce qui correspond à échantillonner f avec une période d'échantillonnage de $\frac{\pi}{A}$, et donc une fréquence d'échantillonnage de $\frac{A}{\pi} = 2 \times \frac{A}{2\pi}$, où $\frac{A}{2\pi}$ correspond à la fréquence maximale apparaissant dans $\hat{f}$!

Remarque 1.8.2 (Sous-échantillonnage). *Si $f \in \mathrm{BL}_A^2$ et qu'on décide au final d'échantillonner f avec une fréquence trop faible, de la forme $(1-\lambda)\frac{A}{\pi}$ avec $\lambda \in \left(0, \frac{2}{3}\right)$, alors on a, pour tout $n \in \mathbb{Z}$:*

$$\begin{aligned} f\left(\frac{n\pi}{(1-\lambda)A}\right) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-A}^{A} \hat{f}(\xi)e^{i\frac{n\pi\xi}{(1-\lambda)A}}\mathrm{d}\xi \\ &= \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-A}^{-(1-\lambda)A} \hat{f}(\xi)e^{i\frac{n\pi\xi}{(1-\lambda)A}}\mathrm{d}\xi + \int_{-(1-\lambda)A}^{(1-\lambda)A} \hat{f}(\xi)e^{i\frac{n\pi\xi}{(1-\lambda)A}}\mathrm{d}\xi + \int_{(1-\lambda)A}^{A} \hat{f}(\xi)e^{i\frac{n\pi\xi}{(1-\lambda)A}}\mathrm{d}\xi\right) \\ &= \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-3(1-\lambda)A}^{-(1-\lambda)A} \hat{f}(\xi)e^{i\frac{n\pi\xi}{(1-\lambda)A}}\mathrm{d}\xi + \int_{-(1-\lambda)A}^{(1-\lambda)A} \hat{f}(\xi)e^{i\frac{n\pi\xi}{(1-\lambda)A}}\mathrm{d}\xi + \int_{(1-\lambda)A}^{3(1-\lambda)A} \hat{f}(\xi)e^{i\frac{n\pi\xi}{(1-\lambda)A}}\mathrm{d}\xi\right) \end{aligned}$$

car $\lambda \in \left(0, \frac{2}{3}\right)$ et donc $3(1-\lambda)A > A$ et donc $\hat{f}$ est nulle sur $[-3(1-\lambda)A, -A]$ et sur $[A, 3(1-\lambda)A]$. En effectuant le changement de variable $\xi' = \xi + 2(1-\lambda)A$ dans la première intégrale et $\xi' = \xi - 2(1-\lambda)A$ dans la troisième intégrale, on obtient :

$$f\left(\frac{n\pi}{(1-\lambda)A}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{-(1-\lambda)A}^{(1-\lambda)A}\left(\hat{f}(\xi - 2(1-\lambda)A)\underbrace{e^{-2in\pi}}_{=1} + \hat{f}(\xi) + \hat{f}(\xi + 2(1-\lambda)A)\underbrace{e^{2in\pi}}_{=1}\right)e^{i\frac{n\pi\xi}{(1-\lambda)A}}\mathrm{d}\xi$$

Ainsi, si $g \in \mathrm{BL}_{(1-\lambda)A}^2$ est telle que :

$$\text{pour presque tout } \xi \in [-(1-\lambda)A, (1-\lambda)A], \quad \hat{g}(\xi) = \hat{f}(\xi - 2(1-\lambda)A) + \hat{f}(\xi) + \hat{f}(\xi + 2(1-\lambda)A)$$

alors la fonction recréée par cet échantillonnage de f est g ! Cela revient à créer, lorsque $\hat{f}$ est paire, une fonction

g dont le spectre en fréquence correspond au spectre de f qu'on a « replié » sur les bords (un beau dessin peut être réalisé si vous le souhaitez). Si de plus λ est plus grand que $\frac{2}{3}$ alors d'autres phénomènes de repliement apparaissent.

Remarque 1.8.3 (Prolongement holomorphe d'une fonction dont la transformée de Fourier est à support compact)**.** *On a vu, donc que si $f \in \mathrm{BL}^2_A$, on a :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-A}^{A} \hat{f}(\xi) e^{ix\xi} \mathrm{d}\xi.$$

Grâce à cette formule, on peut en fait prolonger f en une fonction entière ! En effet, en posant :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \tilde{f}(z) := \frac{1}{2\pi} \int_{-A}^{A} \hat{f}(\xi) e^{iz\xi} \mathrm{d}\xi,$$

alors, par théorème d'holomorphie sous l'intégrale, on a que $\tilde{f}$ définit une fonction entière et $\tilde{f}_{|\mathbb{R}} = f$. De plus, on a l'estimation magique suivante : si $R > 0$, alors :

$$\forall z \in \mathbb{D}(0, R), \quad |f(z)| \leqslant e^{AR} \sqrt{2A} \frac{1}{2\pi} \left\| \hat{f} \right\|_2 = e^{AR} \sqrt{\frac{A}{\pi}} \|f\|_2.$$

Ainsi, la convergence de la série

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f\left(\frac{n\pi}{A}\right) \tau_{\frac{n\pi}{A}} \varphi_A$$

vers f se fait en norme L^2, en norme uniforme également comme on a vu, mais il s'agit donc également d'une convergence uniforme sur tout compact ! Ainsi, on récupère, en particulier, une convergence uniforme de toutes les dérivées !