1.17 Résolution de l'équation de la chaleur sur le cercle (209, 234, 235, 241, 246) [9], [30]

J'aime la physique, vous saviez ? Plus sérieusement, l'équation de la chaleur a fait naître via le génie de notre préfet de l'Isère préféré un outil puissant de l'analyse et de la théorie du signal : les séries de Fourier. Franchement, faut avoir du culot pour voir que des sinus sont solution et puis dire "Oh bah si je somme ces sinus ça fait toutes les solutions non ?" et puis au final avoir **raison !** Comme quoi, il faut avoir du culot dans la vie.

Théorème 1.36 (Résolution de l'équation de la chaleur sur le cercle)**.** Pour toute fonction $f \in \mathscr{C}^0_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, il existe une unique fonction $u \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \mathbb{C})$ telle que :

— $u \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}, \mathbb{C})$,

— u est 2π-périodique en la variable x,

— u vérifie les équations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \partial_t u(t,x) & = & \partial^2_{xx} u(t,x) \quad \forall (t,x) \in \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}, \\ u(0,\cdot) & = & f. \end{array} \right.$$

De plus, u est en fait dans $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}, \mathbb{C})$.

Démonstration. **Étape 1 : Heuristique**

C'est l'étape où on peut tout se permettre ! Ça permet au moins d'avoir un bon candidat pour la solution. En intégrant l'équation de la chaleur contre les exponentielles e^{-inx} et en notant, pour $t \geqslant 0$, $c_n(t) := c_n(u(t,\cdot))$, on obtient, après deux intégrations par partie dans le second membre :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} c_n'(t) & = & -n^2 c_n(t), \\ c_n(0) & = & c_n(f). \end{array} \right.$$

c_n est de classe $\mathscr{C}^1$? Peut-être, c'est une heuristique de toute façon ! En tous cas si on a ces équations, alors on a une expression explicite de $c_n(t)$:

$$\forall t \geqslant 0, \quad c_n(t) = c_n(f) e^{-n^2 t},$$

de sorte qu'on peut écrire :

$$u(t,x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e^{-n^2 t + inx}$$

On a donc un candidat solide pour être solution de cette équation, mais on n'a rien prouvé !

Étape 2 : Bonne définition du candidat et vérification des hypothèses dans le cas où f est $\mathscr{C}^1$

Posons alors :

$$u : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (t,x) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e^{-n^2 t + inx}. \end{array}$$

Premièrement, u est bien définie sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ car le terme de la somme peut être majoré en valeur absolue par $|c_n(f)|$, et, puisque f est de classe $\mathscr{C}^1$, alors la somme de ses coefficients de Fourier converge absolument, donc u est la somme d'une série de fonctions continues, normalement convergente. Ainsi, u est bien définie mais aussi continue sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$. De plus :

— u est bien 2π-périodique en la variable x,

— Si $0 < a$ est fixé, on a :

$$\forall (t,x) \in [a, +\infty) \times \mathbb{R}, \ \forall (k,l) \in \mathbb{N}^2, \quad \left| c_n(f) \left(-n^2\right)^k (in)^l e^{-n^2 t + inx} \right| \leqslant |c_n(f)| n^{2k+l} e^{-n^2 a},$$

et la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|n^{2k+l}e^{-n^2a}$ converge. Ainsi, par convergence normale, u est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+*}\times\mathbb{R}$.

— On a donc d'après le point précédent :

$$\forall (t,x)\in\mathbb{R}^{+*}\times\mathbb{R},\quad \partial_t u(t,x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(-n^2\right) c_n(f)e^{-n^2t+inx},$$

et :

$$\forall (t,x)\in\mathbb{R}^{+*}\times\mathbb{R},\quad \partial^2_{xx} u(t,x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(-n^2\right) c_n(f)e^{-n^2t+inx} = \partial_t u(t,x).$$

— Enfin, on a :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad u(0,x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e^{inx} = f$$

étant donné que f est de classe $\mathscr{C}^1$. Ainsi, l'équation de la chaleur possède une solution !

Étape 3 : Unicité de la solution

Par linéarité de l'équation de la chaleur, il suffit de montrer que l'unique solution u de l'équation de la chaleur telle que $u(0,\cdot)\equiv 0$ est la fonction nulle. Posons alors la fonction énergie suivante :

$$\begin{array}{rccl} E & : & \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & & t & \longmapsto & \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} |u(t,x)|^2\mathrm{d}x = \|u(t,\cdot)\|^2_{\mathrm{L}^2_{2\pi}}. \end{array}$$

E est continue sur $\mathbb{R}^+$ par continuité sous l'intégrale étant donné que l'intégrande est continue sur $\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}$ et peut donc être majorée, uniformément en t sur tout compact J de $\mathbb{R}^+$ par $\|u\|_{\infty,J\times[0,2\pi]}$. Montrons que E est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ par régularité sous l'intégrale.

— $(t,x)\mapsto |u(t,x)|^2$ est bien de classe $\mathscr{C}^1$ en t et est intégrable en x par continuité de $u(t,\cdot)$ sur le compact $[0,2\pi]$,

— $\forall (t,x)\in\mathbb{R}^{+*}$, $\partial_t\left(|u|^2\right)(t,x) = 2\mathrm{Re}\left(\overline{u(t,x)}\partial_t u(t,x)\right)$, que l'on peut majorer uniformément en $t\in[a,b]$ pour tout $0<a<b$ par $2\left\|u\partial_t u\right\|_{\infty,[a,b]\times[0,2\pi]}$ étant donné que u est supposée de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^{+*}\times\mathbb{R}$.

Ainsi, on peut dériver sous l'intégrale pour obtenir :

$$\forall t\in\mathbb{R}^{+*},\quad E'(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 2\mathrm{Re}\left(\overline{u(t,x)}\partial_t u(t,x)\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\mathrm{Re}\left(\int_0^{2\pi}\overline{u(t,x)}\partial^2_{xx}u(t,x)\mathrm{d}x\right) = -\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left|\partial_x u(t,x)\right|^2\mathrm{d}x.$$

Cette dernière égalité se justifie par intégration par parties, le terme entre crochets étant nul par 2π-périodicité de u et $\partial_x u$ en la variable x. On a alors :

— E est continue sur $\mathbb{R}^+$,

— $E(0)=0$ car $u(0,\cdot)\equiv 0$,

— E est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $E'(t)\leqslant 0$ pour tout $t>0$.

— E est positive.

Ainsi, E est identiquement nulle sur $\mathbb{R}^+$! On en conclut donc que u est identiquement nulle, ce qui conclut l'unicité !

C'est bien beau tout ça, mais est-ce qu'on pourrait pas faire mieux ? Est-ce que l'existence et l'unicité est aussi garantie si on suppose seulement $f\in\mathscr{C}^0_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$? Unicité, on aura toujours, car l'argument précédent reste valable. Existence ? C'est plus dur... mais on y arrive ! Pour cela, on considère une nouvelle fois notre candidat, avec un petit changement :

$$\begin{array}{rccl} u & : & \mathbb{R}^+\times\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & & (t,x) & \longmapsto & \left\{\begin{array}{ll} f(x) & \text{si } t=0, \\ \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e^{-n^2t+inx} & \text{sinon.} \end{array}\right. \end{array}$$

On a évidemment que $u(0,\cdot)=f$, que $u\in\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^{+*}\times\mathbb{R},\mathbb{C})$, que u est 2π-périodique en x et que u vérifie l'équation de la chaleur puisque ce sont les mêmes arguments que précédemment. Mais comment montrer que $u\in\mathscr{C}^0(\mathbb{R}^+\times\mathbb{R},\mathbb{C})$?

On se rend compte qu'en fait, si, pour $t > 0$, on note :

$$K_t \quad : \quad \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-n^2 t + inx} \end{array}$$

le noyau de la chaleur, alors on a :

$$\forall (t,x) \in \mathbb{R}^{+*}, \quad u(t,x) = K_t * f(x).$$

Étape 4 : Le noyau de la chaleur est une approximation de l'unité et conclusion dans le cas général

1. K_t est positive pour tout $t > 0$. En effet, on remarque qu'on peut appliquer la formule sommatoire de Poissn à la fonction :

$$g_t \quad : \quad \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \end{array}$$

   qui est une fonction de la classe de Schwartz dont la transformée de Fourier est :

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \widehat{g_t}(\xi) = e^{-\xi^2 t}.$$

   On a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad K_t(x) = 2\pi \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{(x+2n\pi)^2}{4t}} > 0.$$

2. On a de plus :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K_t(x)\mathrm{d}x = c_0(K_t) = 1.$$

3. Enfin, si $\delta > 0$, on a :

$$\frac{1}{2\pi}\int_\delta^{2\pi-\delta} K_t(x)\mathrm{d}x = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_\delta^{2\pi-\delta} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{(x+2n\pi)^2}{4t}}\mathrm{d}x = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_{\delta+2n\pi}^{2(n+1)\pi-\delta} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{u^2}{4t}}\mathrm{d}u.$$

   Cette somme correspond donc à l'intégrale de notre gaussienne g_t sur $\mathbb{R}$ privé des intervalles $[-\delta+2n\pi, \delta+2n\pi]$ pour $n \in \mathbb{Z}$. En particulier, par positivité de la gaussienne, on a que cette somme d'intégrales est plus petite que l'intégrale sur $\mathbb{R} \setminus [-\delta, \delta]$ de notre gaussienne. Ainsi :

$$0 \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_\delta^{2\pi-\delta} K_t(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_{|u|\geqslant\delta} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{u^2}{4t}}\mathrm{d}u = \int_{|v|\geqslant\frac{\delta}{\sqrt{2t}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{v^2}{2}}\mathrm{d}v \xrightarrow[t\to 0^+]{} 0$$

   par convergence dominée.

Ainsi, $(K_t)_{t>0}$ vérifie les hypothèses d'une approximation de l'unité, de sorte que :

$$\|K_t * f - f\|_\infty = \|u(t,\cdot) - f\|_\infty \xrightarrow[t\to 0^+]{} 0$$

car f est continue et 2π-périodique, ce qui montre que $t \mapsto u(t,\cdot)$ est continue en 0 et donc $u \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \mathbb{C})$, cela conclut donc la preuve dans le cas général ! $\square$

Remarque 1.17.1 (Cas de conditions initiales moins régulières)**.** *Le fait que (K_t) soit une approximation de l'unité indique que pour toute fonction initiale $f \in \mathrm{L}^p_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ avec $p \in [1,+\infty)$, la fonction $u(t,x) = K_t * f(x)$ est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}$, vérifie l'équation de la chaleur sur ce domaine et est l'unique solution de la chaleur vérifiant :*

$$\|u(t,\cdot) - f\|_{\mathrm{L}^p_{2\pi}} \xrightarrow[t\to 0^+]{} 0.$$