1.9 Inégalité de Heisenberg (201, 209, 234, 250)

Une autre application de l'analyse de Fourier en physique (ici, en physique quantique) est l'inégalité de Heisenberg : elle stipule qu'une fonction f ne peut être à la fois localisée en espace (c'est-à-dire avoir une variance spatiale faible) et en fréquence. En physique quantique, cela se traduit par le fait que si une particule quantique a un comportement régi par une fonction d'onde Ψ, alors la variance selon $|\Psi|^2$ de la position de cette particule multiplié par la variance de l'impulsion (ou quantité de mouvement) de cette particule est minorée par $\frac{\hbar^2}{4}$. Ainsi, on ne peut pas connaître avec précision à la fois la position de la particule et sa quantité de mouvement !

Théorème 1.19 (Inégalité de Heisenberg)**.** Soit $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$. Alors f vérifie l'inégalité :

$$\left(\int_{\mathbb{R}} |xf(x)|^2 \,\mathrm{d}x\right)\left(\int_{\mathbb{R}} \left|\xi\hat{f}(\xi)\right|^2 \mathrm{d}\xi\right) \geqslant \frac{\pi}{2}\left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 \mathrm{d}x\right)^2.$$

Démonstration. **Étape 1 : La preuve pour $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$**

On commence par montrer l'inégalité pour f dans la classe de Schwartz, et on l'étendra par densité (on verra comment). Si $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, alors, on a :

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad i\xi\hat{f}(\xi) = \widehat{f'}(\xi).$$

Ainsi, par la formule de Plancherel :

$$\int_{\mathbb{R}} \left|\xi\hat{f}(\xi)\right|^2 \mathrm{d}\xi = \left\|\widehat{f'}\right\|_2^2 = 2\pi \left\|f'\right\|_2^2.$$

Ainsi :

$$\left(\int_{\mathbb{R}} |xf(x)|^2 \,\mathrm{d}x\right)\left(\int_{\mathbb{R}} \left|\xi\hat{f}(\xi)\right|^2 \mathrm{d}\xi\right) = 2\pi \left\|xf\right\|^2 \left\|f'\right\|_2^2 \geqslant 2\pi \left|\int_{\mathbb{R}} xf(x)\overline{f'(x)}\mathrm{d}x\right|^2$$

par inégalité de Cauchy-Schwarz. Or, par intégration par parties, on a :

$$\int_{\mathbb{R}} xf(x)\overline{f'(x)}\mathrm{d}x = \underbrace{\left[x|f(x)|^2\right]_{-\infty}^{+\infty}}_{=0} - \int_{\mathbb{R}} \left(f(x) + xf'(x)\right)\overline{f(x)}\mathrm{d}x.$$

En regroupant les termes, on obtient :

$$\mathrm{Re}\left(\int_{\mathbb{R}} xf(x)\overline{f'(x)}\mathrm{d}x\right) = -\frac{1}{2}\|f\|_2^2.$$

Au final, on obtient :

$$\left(\int_{\mathbb{R}} |xf(x)|^2 \,\mathrm{d}x\right)\left(\int_{\mathbb{R}} \left|\xi\hat{f}(\xi)\right|^2 \mathrm{d}\xi\right) \geqslant 2\pi \left|\int_{\mathbb{R}} xf(x)\overline{f'(x)}\mathrm{d}x\right|^2 \geqslant 2\pi \times \frac{1}{4}\|f\|_2^4 = \frac{\pi}{2}\left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 \mathrm{d}x\right)^2.$$

Étape 2 : Extension par densité

Pour prouver le cas général, il suffit de le prouver pour toute fonction f dans l'espace fonctionnel suivant :

$$H_1^1(\mathbb{R}) = \left\{f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}) \;\middle|\; xf \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}),\ \xi\hat{f} \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})\right\},$$

qui est un espace de Sobolev modifié pour être stable par transformée de Fourier. En effet, si $f \notin H_1^1(\mathbb{R})$, l'inégalité est trivialement vérifiée. On va donc chercher à approcher les fonctions de $H_1^1(\mathbb{R})$ par des fonctions de $\mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ pour la norme adaptée à cet espace :

$$\|f\|_{H_1^1}^2 := \|f\|_2^2 + \|xf\|_2^2 + \|\xi\hat{f}\|_2^2.$$

Remarquez d'ailleurs que $H_1^1(\mathbb{R})$ muni de cet norme est un espace de Hilbert !

Sous-étape 1 : Approximation par des fonctions à support compact

On va d'abord chercher à approcher une fonction $f \in H_1^1(\mathbb{R})$ par une fonction de $H_1^1(\mathbb{R})$ à support compact. Soit $\chi \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ telle que :

— $\chi(0) = 1$,

— $0 \leqslant \chi \leqslant 1$,

— $\mathrm{supp}(\chi) \subset [-1, 1]$ (pour fixer les idées).

Sachez prouver qu'une telle fonction existe ! La plus simple est la suivante :

$$\begin{array}{rccl} \chi & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & \begin{cases} e^{-\frac{x}{1-x^2}} & \text{si} \quad x \in (-1,1), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{array}$$

Posons maintenant la suite de fonctions $\chi_n = \chi\left(\frac{\cdot}{n}\right)$. Alors, pour toute fonction $g \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$, on a :

$$\|g\chi_n - g\|_2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$

par convergence dominée, étant donné que $\chi_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{p.p.}} 1$. Ainsi, en particulier, $f\chi_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathrm{L}^2} f$ et $xf\chi_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathrm{L}^2} xf$. On a alors un candidat solide pour approcher f en norme $\|\cdot\|_{H_1^1}$. Notons alors, pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n := f\chi_n$. On a bien que $f_n \in H_1^1(\mathbb{R})$ et que f_n est à support compact. Il ne reste plus qu'à montrer que $\xi\widehat{f_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathrm{L}^2} \xi\hat{f}$. On a, pour presque tout $\xi \in \mathbb{R}$:

$$\xi\widehat{f_n}(\xi) = \frac{1}{2\pi}\xi\left(\hat{f} * \widehat{\chi_n}\right)(\xi) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \xi\hat{f}(\xi-\zeta)\widehat{\chi_n}(\zeta)\mathrm{d}\zeta = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{\mathbb{R}}(\xi-\zeta)\hat{f}(\xi-\zeta)\widehat{\chi_n}(\zeta)\mathrm{d}\zeta + \int_{\mathbb{R}}\hat{f}(\xi-\zeta)\zeta\widehat{\chi_n}(\zeta)\mathrm{d}\zeta\right).$$

On reconnaît, dans le premier terme, la fonction $\left(\zeta\hat{f}\right) * \widehat{\chi_n}$. Puisque $\zeta\hat{f} \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$, il existe $g \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ tel que $\hat{g}(\zeta) = \zeta\hat{f}(\zeta)$ pour presque tout $\zeta \in \mathbb{R}$, de sorte que :

$$\left(\zeta\hat{f}\right) * \widehat{\chi_n} = \hat{g} * \widehat{\chi_n} = 2\pi\widehat{g\chi_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathrm{L}^2} 2\pi\hat{g} = 2\pi\zeta\hat{f}$$

par continuité de la transformée de Fourier sur L^2 (ou Plancherel, c'est pareil), étant donné que $g\chi_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathrm{L}^2} g$.

Maintenant, montrons que le deuxième terme tend vers 0 quand $n \to +\infty$. En effet, on reconnaît la fonction $\hat{f} * (\zeta\widehat{\chi_n}) = -i\hat{f} * \widehat{\chi_n'} = -2i\pi\widehat{f\chi_n'}$. Or, par hypothèse, on a :

$$\chi_n' = \frac{1}{n}\chi'\left(\frac{x}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CVS}} 0 \quad \text{et donc} \quad f\chi_n' \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{p.p.}} 0.$$

De plus, $f\chi_n'$ est dominée indépendamment de n par $f\|\chi'\|_\infty \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$. Ainsi, par convergence dominée :

$$f\chi_n' \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathrm{L}^2} 0 \quad \text{et donc} \quad \hat{f} * (\zeta\widehat{\chi_n}) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathrm{L}^2} 0.$$

En définitive, on obtient bien que $\xi\widehat{f_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathrm{L}^2} \xi\hat{f}$, et donc $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{H_1^1} f$, ce qui conclut cette sous-étape !

Sous-étape 2 : Approximation des fonctions à support compact par des fonctions $\mathscr{C}_c^\infty$

Prenons donc maintenant $f \in H_1^1(\mathbb{R})$ à support compact, inclus dans $[-R+1, R-1]$ disons, et prenons un noyau régularisant $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ construit ainsi : soit $\varphi \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ vérifiant :

— $\varphi \geqslant 0$,

— $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \varphi = 1$,
— $\operatorname{supp}(\varphi) \subset [-1, 1]$ (pour fixer les idées).

On pose alors, pour $n \in \mathbb{N}$, $\varphi_n(x) = n\varphi(nx)$. On a donc que $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une approximation de l'unité, et que pour toute fonction $g \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R})$, $g * \varphi_n \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$. En notant alors, pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n := f * \varphi_n$, on a :

— $f_n \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R})$,
— $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \operatorname{supp}(f_n) \subset \left[-R+1-\frac{1}{n}, R-1+\frac{1}{n}\right] \subset [-R, R]$,
— $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathrm{L}^2} f$.

Montrons maintenant que $xf_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathrm{L}^2} xf$:

$$\int_{\mathbb{R}} x^2 \left|f_n(x) - f(x)\right|^2 \mathrm{d}x = \int_{-R}^{R} x^2 \left|f_n(x) - f(x)\right|^2 \mathrm{d}x \leqslant R^2 \|f_n - f\|_2^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

La première égalité est vérifiée car $[-R, R]$ contient à la fois le support de f_n et celui de f. Il ne reste plus qu'à vérifier que $\xi\widehat{f_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathrm{L}^2} \xi\hat{f}$. On remarque que, étant donné que $f_n = f * \varphi_n$, que $\widehat{f_n} = \hat{f}\widehat{\varphi_n}$. Ainsi :

$$\int_{\mathbb{R}} \xi^2 \left|\widehat{f_n}(\xi) - \hat{f}(\xi)\right|^2 \mathrm{d}\xi = \int_{\mathbb{R}} \xi^2 \left|\hat{f}(\xi)\right|^2 \left|\widehat{\varphi_n}(\xi) - 1\right|^2 \mathrm{d}\xi.$$

Étant donné que $\varphi_n(x) = n\varphi(nx)$ pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \widehat{\varphi_n}(\xi) = \hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \hat{\varphi}(0) = \int_{\mathbb{R}} \varphi = 1,$$

car $\varphi \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R})$, et donc $\hat{\varphi} \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, en particulier $\hat{\varphi}$ est continue. Ainsi, l'intégrande de :

$$\int_{\mathbb{R}} \xi^2 \left|\hat{f}(\xi)\right|^2 \left|\widehat{\varphi_n}(\xi) - 1\right|^2 \mathrm{d}\xi,$$

tend vers 0 presque partout. Enfin, par inégalité triangulaire, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et presque tout $\xi \in \mathbb{R}$:

$$\xi^2 \left|\hat{f}(\xi)\right|^2 \left|\widehat{\varphi_n}(\xi) - 1\right|^2 \leqslant \xi^2 \left|\hat{f}(\xi)\right|^2 (1 + \|\hat{\varphi}\|_\infty) \leqslant \xi^2 \left|\hat{f}(\xi)\right|^2 (1 + \|\varphi\|_1) = 2\xi^2 \left|\hat{f}(\xi)\right|^2$$

car φ est positive et donc :

$$\|\varphi\|_1 = \int_{\mathbb{R}} \varphi = 1.$$

Étant donné que $\xi\hat{f} \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$, le théorème de convergence dominée peut s'appliquer, et on obtient donc :

$$\xi\widehat{f_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \xi f,$$

ce qui termine de montrer que $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{H_1^1} f$!

Étape 3 : Conclusion

L'étape précédente a permis de montrer que $\mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ était dense dans $\left(H_1^1(\mathbb{R}), \|\cdot\|_{H_1^1}\right)$. Ainsi, si $f \in H_1^1(\mathbb{R})$, il existe $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ approchant f en norme H_1^1. Or, d'après la première étape :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|xf_n\|_2^2 \times \left\|\xi\widehat{f_n}\right\|_2^2 \geqslant \frac{\pi}{2} \|f_n\|_2^4.$$

Ainsi, en faisant tendre n vers $+\infty$ et en utilisant le fait que $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{H_1^1} f$, on obtient :

$$\|xf\|_2^2 \times \left\|\xi\hat{f}\right\|_2^2 \geqslant \frac{\pi}{2}\|f\|_2^4,$$

ce qui conclut la preuve ! $\square$

Remarque 1.9.1 (L'inégalité est-elle optimale ? Si oui y a-t-il moyen de caractériser le cas d'égalité ?)**.** *On peut caractériser le cas d'égalité de l'inégalité de Heisenberg pour les fonctions de la classe de Schwartz, qui revient à avoir égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz du début. On a égalité si et seulement s'il existe une constante $\lambda \in \mathbb{R}$ telle que :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \lambda x f(x).$$

Ainsi, il y a égalité dans l'inégalité de Heisenberg si et seulement si f est une gaussienne :

$$f(x) = Ce^{-\lambda x^2}$$

avec $\lambda > 0$. Vérifions pour la gaussienne centrée réduite :

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

On a :

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \hat{g}(\xi) = e^{-\frac{\xi^2}{2}}.$$

Ainsi :

$$\left(\int_{\mathbb{R}} |xg(x)|^2 \,\mathrm{d}x\right)\left(\int_{\mathbb{R}} |\xi\hat{g}(\xi)|^2 \,\mathrm{d}\xi\right) = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{\mathbb{R}} x^2 e^{-x^2}\mathrm{d}x\right)^2.$$

Or :

$$\int_{\mathbb{R}} x^2 e^{-x^2}\mathrm{d}x = \underbrace{\left[-\frac{x}{2}e^{-x^2}\right]_{-\infty}^{+\infty}}_{=0} + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

D'où :

$$\left(\int_{\mathbb{R}} |xg(x)|^2 \,\mathrm{d}x\right)\left(\int_{\mathbb{R}} |\xi\hat{g}(\xi)|^2 \,\mathrm{d}\xi\right) = \frac{1}{8}.$$

Or :

$$\int_{\mathbb{R}} |g(x)|^2\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi} \times \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi} \times \sqrt{\pi} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}.$$

Ainsi :

$$\left(\int_{\mathbb{R}} |g(x)|^2\mathrm{d}x\right)^2 = \frac{1}{4\pi}.$$

On reconnaît donc :

$$\left(\int_{\mathbb{R}} |xg(x)|^2 \,\mathrm{d}x\right)\left(\int_{\mathbb{R}} |\xi\hat{g}(\xi)|^2 \,\mathrm{d}\xi\right) = \frac{1}{8} = \frac{\pi}{2} \times \frac{1}{4\pi} = \frac{\pi}{2}\left(\int_{\mathbb{R}} |g(x)|^2\mathrm{d}x\right)^2 \text{ !}$$