ILLUSTRER PAR DES EXEMPLES QUELQUES MÉTHODES DE CALCUL D'INTÉGRALES DE FONCTIONS D'UNE OU PLUSIEURS VARIABLES

I - Techniques d'intégration sur $\mathbb{R}$, version Riemann

1) Intégrales sur un segment : les bases

Principe 1 : Calculer l'intégrale d'une fonction $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, c'est calculer l'aire (algébrique) sous la courbe d'équation $y=f(x)$.

Exemple 2 : $\int_0^1 1\,dx = 1$, $\int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}$ (voir annexe)

Théorème 3 : Soient $a<b$ et $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continue par morceaux.
Alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(a+i\frac{b-a}{n}) = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(a+i\frac{b-a}{n}) = \int_a^b f(x)\,dx$.
(illustration en annexe)

Exemple 4 : De la factorisation $X^{2n}-1=(X-1)(X+1)\prod_{k=1}^{n-1}(X^2-2\cos(\frac{k\pi}{n})X+1)$,
on déduit : $\forall r>1$, $\int_0^{\pi}\ln(r^2-2r\cos(\theta)+1)\,d\theta = 2\pi\ln(r)$.

Remarque 5 : Si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ est continue par morceaux et si $c\in[a,b]$, alors $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$. On se concentrera donc sur les fonctions continues.

Théorème fondamental 6 : Si $f\in\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$, alors la fonction
$F:[a,b]\to\mathbb{R}$, $x\mapsto\int_a^x f(t)dt$ est de classe $\mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{R})$ et $F'=f$. En particulier, si $G\in\mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{R})$ vérifie $G'=f$, alors :
$\forall x\in[a,b]$, $G(x)=G(a)+F(x)$ et $\int_a^b f(t)dt = G(b)-G(a)$.

Exemple 7 : Si $a<b$, alors :
- $\int_a^b x^n\,dx = \frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{n+1}$,
- $\int_a^b \sin(x)dx = \cos(b)-\cos(a)$,
- $\int_a^b \frac{1}{x}dx = \ln\left(\frac{b}{a}\right)$ si a,b de même signe
- $\int_a^b e^x dx = e^b-e^a$
- $\int_a^b \frac{1}{1+x^2}dx = \mathrm{Arctan}(b)-\mathrm{Arctan}(a)$.

Problème 8 : Comment calculer des intégrales du type $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(x)^n dx$ ou $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(x)^n dx$?

2) L'intégration par parties et le changement de variables

Proposition 9 : Soient $f,g\in\mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{R})$. Alors :
$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx.$$
(On a noté $[f(x)g(x)]_a^b$ pour $f(b)g(b)-f(a)g(a)$.)

Exemple 10 : Si $b>a>0$, alors : $\int_a^b \ln(x)dx = b(\ln(b)-1)-a(\ln(a)-1)$.

Exemple 11 (Wallis) : Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose :
$W_n := \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(x)^n dx$. Alors : $W_0=\frac{\pi}{2}$, $W_1=1$ et :
$\forall n\in\mathbb{N}$, $W_{n+2}=\frac{n+1}{n+2}W_n$. Ainsi :
$\forall p\in\mathbb{N}$, $W_{2p}=\frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\frac{\pi}{2}$ et $W_{2p+1}=\frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}$.

Application 12 : On a l'équivalent : $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2n\pi}\left(\frac{n}{e}\right)^n$.

Théorème 13 : Soient $I\subset\mathbb{R}$ un intervalle, $\varphi\in\mathcal{C}^1([a,b],I)$ et $f\in\mathcal{C}^0(I,\mathbb{R})$.
Alors : $\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(y)dy$.

Exemples 14 :
- $\int_a^b \frac{2t}{1+t^2}dt = \ln\left(\frac{1+b^2}{1+a^2}\right)$
- $\int_{-1}^1\sqrt{1-t^2}\,dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos(x)^2dx = \frac{\pi}{2}$;
- $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(x)^n dx$.

3) Intégrales sur un intervalle : intégrales généralisées

Définition 15 : Soient $I\subset\mathbb{R}$ un intervalle et $f\in\mathcal{C}^0(I,\mathbb{R})$. Posons $a=\inf I$ et $b=\sup I$. Si pour toutes suites $(a_n),(b_n)\in I^{\mathbb{N}}$, $a_n\underset{n\to\infty}{\to}a$, $b_n\underset{n\to\infty}{\to}b$, la limite $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_{a_n}^{b_n}f(x)dx$ existe et ne dépend pas du choix de la suite, alors on dit que l'intégrale $\int_I f(x)dx$ (aussi notée $\int_a^b f(x)dx$) converge et sa valeur est la limite commune $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_{a_n}^{b_n}f(x)dx$.

Exemple 16 :
- L'intégrale $\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{1+x^2}dx$ converge et on a : $\int_{\mathbb{R}}\frac{dx}{1+x^2}=\pi$.
- L'intégrale $\int_0^{+\infty}\frac{1}{x}dx$ ne converge pas.

Exemple 17 : On veut déterminer si $\int_0^{+\infty}\frac{\sin(x)}{x}dx$ converge et déterminer sa valeur le cas échéant.
Si on pose $I_b(t)=\int_0^b\frac{\sin(x)}{x}e^{-tx}dx$ pour $b>0$, on aimerait pouvoir écrire $I_b'(t) = -\int_0^b \sin(x)e^{-tx}dx = \frac{e^{-tb}}{t^2+1}(\cos(b)-t\sin(b))-\frac{1}{t^2+1}$
puis $I_b(0)=\frac{\pi}{2}-\cos(b)\int_0^{+\infty}\frac{e^{-xb}}{x^2+1}dx+\sin(b)\int_0^{+\infty}\frac{xe^{-xb}}{x^2+1}dx$ en ayant en tête que $I_b(t)\underset{t\to+\infty}{\to}\int_0^{}0=0$
puis $\lim\limits_{b\to+\infty}I_b(0)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin(x)}{x}=\frac{\pi}{2}-\int_0^{+\infty}0+\int_0^{+\infty}0=\frac{\pi}{2}$.
Comment justifier ces étapes ?

Objectifs 18 : Justifier l'interversion limite $\leftrightarrow\int$ et l'interversion dérivation $\longleftrightarrow\int$.

II - L'intégration sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^d$ version Lebesgue

1) Théorèmes d'interversion et de changement de variable

Théorème 19 (Convergence dominée) : Soient $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, (f_n) une suite de fonctions $E \to \mathbb{R}$ mesurables convergeant μ-presque partout vers $f : E \to \mathbb{R}$. S'il existe $g \in L^1(E, \mu)$ telle que :
$\forall n \in \mathbb{N}, |f_n(x)| \leq g(x)$ pour presque tout $x \in E$, alors $f \in L^1(E, \mu)$ et :
$\int |f_n - f| d\mu \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$. En particulier, $\int f_n d\mu \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int f d\mu$.

Exemple 20 (Gamma) : Pour $x > 0$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ est convergente et, en notant $\Gamma(x)$ sa valeur, on a : $\Gamma(x) = \lim_{n \to +\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}$

Contre-exemple 21 : La suite de fonctions $(\mathbb{1}_{[n, n+1]})_{n \in \mathbb{N}}$ converge presque partout vers 0 mais $\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[n, n+1]}(x) dx = 1 \not\xrightarrow[n \to \infty]{} 0$.

Théorème 22 : Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $n \in$
Soit $f : I \times E \to \mathbb{R}$ telle que :
- Pour presque tout $x \in E$, $f(\cdot, x) \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$
- Pour tout $t \in I$, $f(t, \cdot), \frac{\partial f}{\partial t}(t, \cdot), \dots, \frac{\partial^{n-1} f}{\partial t^{n-1}}(t, \cdot) \in L^1(E, \mu)$.
- $\exists g \in L^1(E, \mu)$, $|\frac{\partial^n f}{\partial t^n}(t, x)| \leq g(x)$ pour tout $t \in I$ et presque tout $x \in E$.

Alors $F : t \mapsto \int_E f(t, x) d\mu(x) \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$ et $F^{(n)}(t) = \int_E \frac{\partial^n f}{\partial t^n}(t, x) d\mu(x)$.

Contre-exemple 23 : $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \int_0^{+\infty} x^2 e^{-t|x|} dt$ est bien définie et :
$\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = |x|$. Ainsi, F n'est pas dérivable en 0.

Exemple 24 : Soit $F : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt} - e^{-t}}{t} dt$. F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et :
$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, F'(x) = \frac{1}{x}$. Ainsi : $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, F(x) = \ln(x)$.

Théorème 25 (Holomorphie) : Soient $f : \Omega \times E \to \mathbb{C}$, $\Omega \subset \mathbb{C}$ ouvert, $(E, \mathcal{A}, \mu)$ espace mesuré tels que :
- Pour presque tout $x \in E$, $f(\cdot, x) \in \mathcal{H}(\Omega)$.
- Pour tout $z \in \Omega$, $f(z, \cdot)$ est mesurable
- $\exists g \in L^1(E, \mu)$, $|f(z, x)| \leq g(x)$ pour tout $z \in \Omega$ et pour presque tout $x \in E$.

Alors $F : \Omega \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \int_E f(z, x) d\mu(x)$ est holomorphe sur Ω et :
$\forall n \in \mathbb{N}, F^{(n)}(z) = \int_E \frac{\partial f}{\partial z^n}(z, x) d\mu(x)$.

Exemple 26 : Soit $\Omega_0 = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > 0\}$. La fonction G définie comme :
$G : \Omega_0 \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \int_{\mathbb{R}} e^{-zx^2} dx$ est holomorphe. Comment calculer sa valeur ?

Théorème 27 (Changement de variables) : Soient $U, V \subset \mathbb{R}^d$ deux ouverts, $f \in L^1(V, \lambda_d)$ et $\varphi : U \to V$ un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme. Alors la fonction $U \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(\varphi(x)) |\det(d\varphi(x))|$ est intégrable, et on a :
$$\int_V f(y) dy = \int_U f(\varphi(x)) |\det(d\varphi(x))| dx.$$

Exemple 28 (Guldin) : On se place dans $\mathbb{R}^3$ muni du repère $(Oxyz)$. Soit P un demi-plan délimité par l'axe (Oz) et soit $D \subset P$ un ouvert borné. Soit $\varphi : [0, 2\pi] \times P \to \mathbb{R}^3$, $(\theta, r, z) \mapsto (r\cos(\theta), r\sin(\theta), z)$. L'ensemble $R = \varphi([0, 2\pi] \times D)$ est appelé solide de révolution engendré par D. On a alors :
$$\lambda_3(R) = 2\pi d(G, Oz) \lambda_2(D),$$ où $d(G, Oz)$ désigne la distance de l'isobarycentre G de D à l'axe (Oz) (voir annexe).

Théorème 29 (Fubini) : Soient $(E_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$, $(E_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ deux espaces mesurés et $f : E_1 \times E_2 \to \mathbb{R}$ mesurable. Si μ_1 et μ_2 sont σ-finies et si $f \in L^1(E_1 \times E_2, \mu_1 \otimes \mu_2)$, alors les fonctions $x_1 \mapsto \int_{E_2} f(x_1, x_2) d\mu_2(x_2)$ et $x_2 \mapsto \int_{E_1} f(x_1, x_2) d\mu_1(x_1)$ sont mesurables et on a :
$$\int_{E_1} \left(\int_{E_2} f(x_1, x_2) d\mu_2(x_2) \right) d\mu_1(x_1) = \int_{E_2} \left(\int_{E_1} f(x_1, x_2) d\mu_1(x_1) \right) d\mu_2(x_2) = \int_{E_1 \times E_2} f \, d\mu_1 \otimes \mu_2$$

Contre-exemples 30 :
- $\int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2} dy \right) dx = \frac{\pi}{4}$ et $\int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2} dx \right) dy = -\frac{\pi}{4}$
- Soit $\Delta = \{(x, x) \mid x \in [0, 1]\}$ et m la mesure de comptage sur $[0, 1]$. Alors :
$\int_0^1 \left(\int_0^1 \mathbb{1}_\Delta(x, y) d\lambda_1(x) \right) dm(y) = \int_0^1 \lambda_1(\{y\}) dm(y) = 0$.
$\int_0^1 \left(\int_0^1 \mathbb{1}_\Delta(x, y) dm(y) \right) d\lambda_1(x) = \int_0^1 m(\{x\}) d\lambda_1(x) = 1$.

Exemples bilan 31 :
- $\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx \right)^2 = \pi$. On a alors, $\forall z \in \Omega_0$, $G(z) = \sqrt{\frac{\pi}{z}}$.
- Soit $\mathbb{B}^d = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \|x\|_2 \leq 1\}$. Alors $\lambda_d(\mathbb{B}^d) = \frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2}+1)}$.
- Si $(X, Y) \sim \mathcal{U}([0,1]^2)$, $X \perp Y$, alors $\mathbb{E}[\|X - Y\|_2] = \int_{[0,1]^4} \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2} \, dx_1 dx_2 dy_1 dy_2 = \frac{2+\sqrt{2}}{15} + \frac{\ln(1+\sqrt{2})}{3} \simeq 0{,}5214$.

2) Intégrales de fonctions complexes : théorèmes de Cauchy et des résidus

Théorème 31 : (Cauchy-dérivées) Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe sur un ouvert Ω et soient $z_0 \in \Omega$ et $r > 0$ de sorte que $\overline{B}(z_0, r) \subset \Omega$.
Alors : $\forall k \in \mathbb{N}$, $f^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2i\pi} \int_{\partial \overline{B}(z_0,r)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}} dz$.

Exemple 32 : Si $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est une fraction rationnelle, alors, si f n'a ni zéros, ni pôles de module 1 : $\frac{1}{2i\pi} \int_{\partial \overline{B}(0,1)} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = Z - P$ où $Z = \# \{ z \in B(0,1) \mid f(z) = 0 \}$, P : nombre de pôle de f de module strictement inférieur à 1.

Théorème 33 : (Résidus) Soient $\gamma : [a,b] \to \Omega$ un chemin $\mathcal{C}^1$ fermé, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction méromorphe, A l'ensemble des pôles de f. Si $\gamma([a,b]) \cap A = \emptyset$ alors :
$$\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma f(z) dz = \sum_{a \in A} \mathrm{Res}(f,a) \mathrm{Ind}_\gamma(a).$$

Exemple 34 (Fresnel) : $\int_{\mathbb{R}} e^{it^2} dt$ est convergente et on a : $\int_{\mathbb{R}} e^{it^2} dt = \sqrt{\pi} e^{\frac{i\pi}{4}}$. (Contour en annexe)

Application 35 (Méthode de la phase stationnaire) : Soient $a < b$, $\varphi, f \in \mathcal{C}^\infty([a,b], \mathbb{R})$. Sous l'hypothèse : $\exists ! x_0 \in (a,b)$, $\varphi'(x_0) = 0$ et $\varphi''(x_0) \neq 0$, alors :
$$\int_a^b e^{it\varphi(x)} f(x) dx \underset{t \to +\infty}{=} f(x_0) \sqrt{\frac{2\pi}{t|\varphi''(x_0)|}} e^{it\varphi(x_0)} e^{i \,\mathrm{sign}(\varphi''(x_0)) \frac{\pi}{4}} + O\left(\frac{1}{t}\right)$$

DEV 1

Application 36 (Asymptotique de la fonction d'Airy) : On considère l'équation différentielle $y'' - ty = 0$. Une solution de cette équation est la fonction d'Airy : $A_i(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx + i\frac{x^3}{3}} dx$. On a alors :
$$A_i(t) = 2\sqrt{\pi} |t|^{-\frac{1}{4}} \cos\left(\frac{2}{3}|t|^{\frac{3}{2}} - \frac{\pi}{4}\right) + \underset{t \to -\infty}{O}\left(|t|^{-\frac{3}{4}}\right).$$

3) Intégration par transformée de Fourier

Théorème 37 (Inversion de Fourier) : Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ telle que $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)$.
Alors, $f(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi) e^{i\langle x, \xi \rangle} d\xi$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$.

Exemple 38 : La loi de Cauchy $\mathcal{C}(1)$ a à densité sur $\mathbb{R}$, de densité $f : x \mapsto \frac{1}{\pi(1+x^2)}$. En notant φ sa fonction caractéristique, on a : $\forall t \in \mathbb{R}$, $\varphi(t) = e^{-|t|}$.

Théorème 39 (Plancherel) : Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$. Alors $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^d)$ et on a :
$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 = \frac{1}{(2\pi)^d} \|\hat{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2$$

Exemple 40 : $\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2 dx = \pi$.

III - Intégration numérique

Cadre 41 : Pour $a < b$ deux réels et $w : (a,b) \to \mathbb{R}_+^*$ une fonction mesurable, on aimerait approcher $\int_a^b f(x) w(x) dx$ par une formule du type $\sum_{j=0} \lambda_j f(x_j)$ avec $x_j \in [a,b]$ et $\lambda_j \in \mathbb{R}$.

Définition 42 (méthode simple) : Soient $\alpha < \beta$ deux réels et $w : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable. On appelle méthode simple de quadrature associée aux noeuds $(x_i)_{0 \leq i \leq l} \in [\alpha, \beta]^{l+1}$ et aux poids $(\lambda_i)_{0 \leq i \leq l} \in \mathbb{R}^{l+1}$ l'application :
$$I : \mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto I(f) = \sum_{j=0}^{l} \lambda_j f(x_j).$$

Définition 43 : Soit I une méthode simple de quadrature. On appelle ordre d'exactitude de la méthode I le plus grand entier $n \in \mathbb{N}$ tel que :
$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \ I(P) = \int_\alpha^\beta P(x) w(x) dx.$$

Théorème 44 : Soit $w \in L^1((\alpha,\beta))$ strictement positif presque partout tel que : $\exists \varepsilon > 0$, $\int_\alpha^\beta e^{\varepsilon |x|} w(x) dx < +\infty$. Alors, il existe une unique suite de polynômes unitaires (P_n) orthogonaux pour le produit scalaire $\langle f, g \rangle_w = \int_I f(x) g(x) w(x) dx$ et de degré n. De plus P_n est scindé et à racines simples, et ses racines sont toutes dans l'intervalle (α, β).

Théorème 45 : Soit $l \geq 0$. Il existe un unique choix des noeuds $(x_i)_{0 \leq i \leq l}$ et des poids $(\lambda_i)_{0 \leq i \leq l}$ de sorte que la méthode simple de quadrature associée soit d'ordre d'exactitude maximal égal à $2l+1$. Les noeuds $(x_i)_{0 \leq i \leq l}$ correspondent aux racines du $(l+1)$-ième polynôme orthogonal.

DEV 2

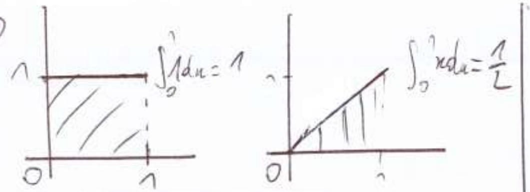
Définition 46 (méthode composée) : On se place dans le cadre $w \equiv 1$. Soient $a < b$ deux réels et soit $a = a_0 < a_1 < \dots < a_{p-1} < a_p = b$ une subdivision de $[a,b]$. On appelle méthode de quadrature composée l'application :
$$I_{(a_0, \dots, a_p)} : \mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto \sum_{i=0}^{p} \left((a_{i+1} - a_i) \sum_{j=0}^{l} \lambda_j f(a_i + x_j(a_{i+1} - a_i)) \right).$$

Théorème 47 (Ordre de convergence d'une méthode composée) : Soient $a < b$ et $a = a_0 < \dots < a_p = b$ une subdivision de $[a,b]$. Notons $h = \max_{0 \leq i \leq p-1} |a_{i+1} - a_i|$ le pas de la subdivision. Alors, si $I_{(a_0, \dots, a_p)}$ est une méthode de quadrature composée associée à une méthode simple d'ordre d'exactitude égal à m, alors :
$\exists C > 0$, $\forall f \in \mathcal{C}^{m+1}([a,b], \mathbb{R})$, $\left| I_{(a_0, \dots, a_p)}(f) - \int_a^b f(x) dx \right| \leq C h^{m+1} \|f^{(m+1)}\|_\infty$.

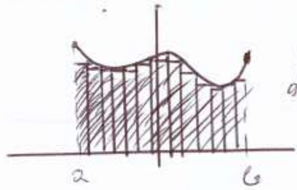
Références : Gourdon, Analyse, Rudin, Analyse réelle et complexe
Candelpergher, Calcul intégral (DEV 1)
Hauchecorne, Les contre-exemples en mathématiques

Annexe :

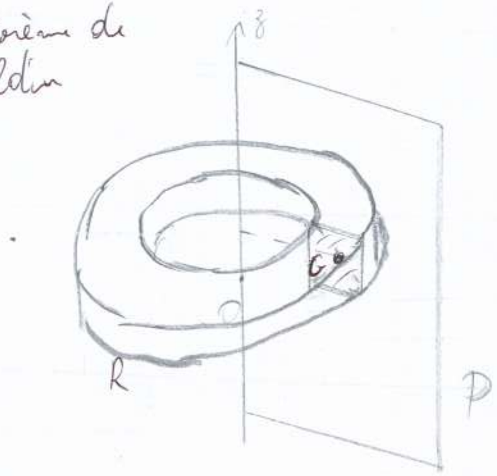
①



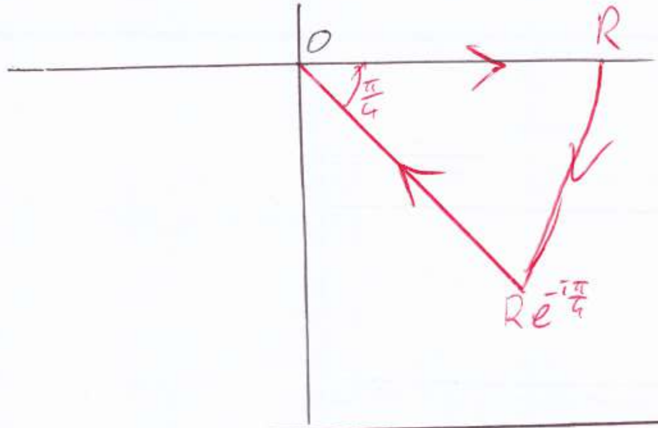
②



③ Théorème de Guldin



④



Contour de l'intégrale de Fresnel

Référence (suite et fin) : Schatzman : Analyse numérique, une approche mathématique

Demailly : Analyse numérique et équations différentielles