Nom:

HOSTEIN

Prénom:

MATTHIAS

Numéro de Jury:

Numéros des sujets tirés:

253, 266

Intitulé du sujet choisi:

Utilisation de la notion de convexité en analyse

Cadre : $(E, \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$.

I - Ensembles et fonctions convexes

A - Ensembles convexes, enveloppe convexe

__Définition 1__ : Soit $C \subset E$ et soient $(a,b) \in C^2$. On appelle segment fermé d'extrémités a et b la partie $[a,b] := \{(1-t)a + tb \mid t \in [0,1]\}$. On dit alors que C est convexe si $[a,b] \subset C$ pour tous a et $b \in C$.

__Exemples 2__ (ANNEXE) : Les boules de E sont convexes. Les montagnes ne sont (en général) pas convexes. Si $\varphi \in E^* \setminus \{0\}$, alors les hyperplans affines $H_\alpha := \varphi^{-1}(\{\alpha\})$ sont convexes pour $\alpha \in \mathbb{R}$. Les demi-espaces $\varphi^{-1}((-\infty, \alpha])$, $\varphi^{-1}((-\infty, \alpha))$, $\varphi^{-1}([\alpha, +\infty))$ et $\varphi^{-1}((\alpha, +\infty))$ sont convexes. Si $E = \mathbb{R}$, les convexes sont les intervalles.

__Proposition 3__ : Soit $C \subset E$ une partie convexe et soit $(C_i)_{i \in I}$ une famille de convexes. Alors :

- $\overline{C}$ et $\mathring{C}$ sont convexes. Si de plus $\mathring{C} \neq \emptyset$, alors $\overline{\mathring{C}} = \overline{C}$.
- $\bigcap_{i \in I} C_i$ est convexe.

__Définition 4__ : Soit $X \subset E$ une partie. On appelle enveloppe convexe de X, notée $\mathrm{Conv}(X)$ l'intersection des ensembles convexes contenant X. (ANNEXE)

__Proposition 5__ : $\mathrm{Conv}(X) = \left\{ \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i,\ (x_1, \dots, x_p) \in X^p,\ (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}_+^p,\ \sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1,\ p \in \mathbb{N}^* \right\}$

Les éléments de $\mathrm{Conv}(X)$ sont donc des barycentres à coefficients positifs d'éléments de X.

__Théorème 6 (Carathéodory)__ : Si E est de dimension finie n et si $X \subset E$ est non-vide, alors :

$$\mathrm{Conv}(X) = \left\{ \sum_{i=0}^{n} \lambda_i x_i \mid (x_0, \dots, x_n) \in E^n,\ \lambda_0, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}_+,\ \sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1 \right\}$$

: les points de $\mathrm{Conv}(X)$ sont alors des barycentres d'au plus $n+1$ points de E.

__Application 7__ : Si $K \subset E$ est compact, alors $\mathrm{Conv}(K)$ est compact.

__Définition 8__ : Soit $z \in E$ et soit $\varphi \in E^*$. On dit que l'hyperplan $\varphi^{-1}(\{\alpha\})$ est un hyperplan d'appui d'un convexe $C \subset E$ en z si $\alpha = \varphi(z)$ et pour tout $x \in C$, $\varphi(x) \leq \alpha$. (ANNEXE)

__Théorème 9__ : Si E est euclidien (de dimension finie) alors, si $C \subset E$ est convexe fermé et non-vide, pour tout point $z \in \partial C$, il existe un hyperplan d'appui de C en z.

__Définition 10__ : Un point $c \in C$, partie convexe non-vide de E est dit __extrémal__ si $C \setminus \{c\}$ est convexe (ANNEXE)

__Théorème 11 (Krein, Milman)__ : Si E est de dimension finie, alors, tout convexe compact non-vide de E est l'enveloppe convexe de ses points extrémaux.

B - Fonctions convexes : propriétés et caractérisations

__Définition 12__ : Soient $C \subset E$ une partie convexe et soit $f : C \to \mathbb{R}$. On dit que f est convexe si : (resp. strictement convexe) $\forall \lambda \in [0,1]$, $\forall x, y \in C$, $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$. (resp. $f(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$ si $x \neq y$, $\lambda \neq 0, 1$)

__Exemples 13__ : Les fonctions $\begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto e^x \end{array}$, $\begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto |x|^p \end{array}$ $(p \geq 1)$, $\begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto -\ln(x) \end{array}$, $\begin{array}{l} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ x \mapsto {}^t x A x \end{array}$ $(A \in S_n^+(\mathbb{R}))$ sont convexes mais il est difficile de le vérifier avec la définition.

__Définition 14__ : Soit $f : C \to \mathbb{R}$ avec $C \subset E$ convexe. On appelle épigraphe de f l'ensemble :

$$\mathrm{Epi}(f) := \{(x, \lambda) \in C \times \mathbb{R} \mid f(x) \leq \lambda\}.$$

__Proposition 15 (ANNEXE)__ : Une fonction $f : C \to \mathbb{R}$ est convexe si et seulement si $\mathrm{Epi}(f) \subset C \times \mathbb{R}$ est convexe.

__Fonctions convexes de la variable réelle__

__Proposition 16__ : Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Alors f est convexe si et seulement si, pour tout $x_0 \in I$, l'application $\begin{array}{l} I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \end{array}$ est croissante. Dans ce cas, si $a < b < c$ sont des points de I, on a : (ANNEXE)

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(c) - f(a)}{c - a} \leq \frac{f(c) - f(b)}{c - b}$$

__Application 17__ : Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ convexe admet des dérivées à droite et à gauche en tout point de I.

En particulier, f est continue sur $\mathring{I}$ (mais pas forcément sur I. ANNEXE).

Fonction convexe en général

Proposition 18 : Soit $f : C \to \mathbb{R}$ une fonction ~~convexe~~ ($C \subset E$). Alors f est convexe si et seulement si pour tous $x, y \in C$ la fonction $\begin{array}{l}[0,1] \to \mathbb{R} \\ t \mapsto f((1-t)x+ty)\end{array}$ est convexe.

Proposition 19 : Soit $U \subset E$ un ouvert convexe et soit $f : U \to \mathbb{R}$ différentiable. Alors f est convexe si et seulement si pour tous $x, y \in U$, on a : $f(x) - f(y) \geq df_y \cdot (x-y)$. ($f$ est au-dessus de ses tangentes). Si f est strict. convexe, l'inégalité est stricte pour $x \neq y$.

Illustration 20 : Si $E = \mathbb{R}^n$, et si $x \in E$, alors $\nabla f(x)$ est la direction de plus forte croissance de f autour de x.

Proposition 21 : Soit $U \subset E$ un ouvert convexe et $f : U \to \mathbb{R}$ deux fois différentiable. Alors f est convexe si et seulement si pour tout $x \in U$, $d^2 f_x$ est positive.

Retour sur l'exemple 13 : Soient $f = \exp$, $g = -\ln$, $h_p : x \mapsto |x|^p$, $p \geq 1$ et $J_A : x \mapsto {}^t x A x$.
Alors $f'' = \exp > 0$, $g''(x) = \frac{1}{x^2} > 0$, si $p > 1$, $h_p''(x) = p(p-1)|x|^{p-2} \geq 0$, $\mathrm{Hess}(J_A) = A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

II - Inégalités de convexité et applications

A - Quelques exemples classiques

Proposition 22 : Soient $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^+$. On a $(x_1 \cdots x_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$.

Proposition 23 : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x \geq 1 + x$, $\ln(1+x) \leq x$ ($x > -1$).

Proposition 24 (Inégalité de Young) : Soit $x, y \in \mathbb{R}_+^*$. On a : $xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{x^q}{q}$ où $p, q \geq 1$ sont tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

B - Utilisation en intégration et en probabilités

Proposition 25 (Hölder) : Soient $p, q \geq 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Soient $f \in L^p(X, \mu)$, $g \in L^q(X, \mu)$. Alors $fg \in L^1(X, \mu)$ et : $\|fg\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}$.

Application 26 : L'application $\begin{array}{l} L^p(X, \mu) \to \mathbb{R} \\ f \mapsto \|f\|_{L^p}\end{array}$ est une norme.

Proposition 27 (Jensen) : Soient (X, μ) un espace probabilisé et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. Alors $f\left(\int_X g \, d\mu\right) \leq \int_X f \circ g \, d\mu$ pour tout $g \in L^1(X, \mu)$.

Application 28 : Si $(\varphi_n)_n$ est une approximation de l'unité sur $\mathbb{R}$, alors pour tout $f \in L^p(\mathbb{R})$, $f * \varphi_n \xrightarrow[n \to +\infty]{\|\cdot\|_p} f$.

Proposition 29 (Hoeffding) : Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles, indépendantes et centrées. On suppose qu'il existe $(c_n)_{n \geq 1} \in (\mathbb{R}^{+*})^{\mathbb{N}^*}$ telle que : $|X_n| \leq c_n$ p.s. pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\mathbb{P}\left(\left|\sum_{i=1}^n X_i\right| > \varepsilon\right) \leq 2 \exp\left(\frac{-\varepsilon^2}{2 \sum_{i=1}^n c_i^2}\right)$.

Application 30 : Soit $X_1, \dots, X_n$ un n-échantillon de loi $\mathcal{B}(p)$ où $p \in]0,1[$. Alors l'intervalle $\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \sqrt{\frac{2}{n} \ln\left(\frac{\alpha}{2}\right)}, \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i + \sqrt{\frac{2}{n} \ln\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\right]$ est un intervalle de confiance non-asymptotique de niveau $1-\alpha$ pour le paramètre p.

III - Convexité et optimisation

A - Projection sur un convexe fermé

Théorème 31 (Projection) : Soit $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace de Hilbert sur $\mathbb{R}$ et $C \subset H$ un convexe fermé et non-vide. Alors pour tout $x \in H$, il existe un unique $p_C(x) \in C$ tel que $\|x - p_C(x)\| = \inf_{z \in C} \|x - z\|$. De plus, $p_C(x)$ est caractérisé par la propriété suivante : pour tout $z \in C$, $\langle x - p_C(x), z - p_C(x) \rangle \leq 0$.

Remarque 32 : • La fonction $p_C : H \to C$ est 1-lipschitzienne.
• Ce théorème indique que le théorème 9 est valable sur un Hilbert.

Applications 33 : • Si $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un espace préhilbertien et $F \subset E$ un sev de dimension finie, alors le théorème 31 s'applique et le projeté $p_F(x)$ est caractérisé par : $x - p_F(x) \in F^\perp$.
• Si $F \subset H$ est un sev fermé ($(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un Hilbert), alors $H = F \oplus F^\perp$.
• Th. de Riesz : Pour tout $\ell \in H'$, il existe un unique $x \in H$ tel que $\ell = \langle x, \cdot \rangle$. De plus, $\|x\|_H = \|\ell\|_{H'}$.
• $F \subset H$ est ~~un sous-espace~~ dense dans H si et seulement si $F^\perp = \{0\}$.
• Moindres carrés : On cherche à résoudre, pour $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^m$, le système $Ax = b$ au sens des moindres carrés. Alors les solutions x sont appartiennent à $\mathrm{Ker}(A) + \{p_{\mathrm{Im}(A)}(b)\}$.

Exemple 34 : Si $f \in \mathcal{C}^0_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, la fonction $\sum_{n=-N}^{N} c_n(f) e^{inx}$ réalise le projeté de f sur $\mathrm{Vect}(e^{inx}, n \in [\![-N, N]\!])$ pour le produit scalaire $\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \bar{f} g$.

B - Optimisation de fonctions en dimension finie

Proposition 35 : Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et soit $f : U \to \mathbb{R}$ différentiable. Alors, si $x^* \in U$ est un optimiseur de f, $df_{x^*} = 0$.

Contre-exemple 36 : $f : x \mapsto x^3$ est telle que $f'(0) = 0$ mais 0 n'est pas un optimiseur de f.

Proposition 37 : Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ deux fois différentiable et soit $x^* \in U$.
• Si x^* minimise f, alors $\mathrm{Hess}(f)(x^*) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.
• Si $\mathrm{Hess}(f)(x^*) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, alors x^* est un minimum local de f.

Intercalaire N° 2

Contre-exemple 38 : $f : x \mapsto x^4$ admet un minimum global en 0 mais $f''(0)=0$.

Fonctions convexes :

Proposition 39 : Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. Alors, si f admet un minimum local en x^*, $f(x^*)$ est un minimum global de f. Si de plus f est strictement convexe, alors ce minimum est unique.

Contre-exemple 40 : exp est strictement convexe mais n'admet aucun minimiseur.

Proposition 41 : Si $f : U \to \mathbb{R}$ est convexe, alors x^* est un minimum de f si et seulement si $df_{x^*} = 0$.

Définition 42 : Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction, $U \subset E$ convexe. On dit que f est α-convexe ($\alpha > 0$) si $x \mapsto f(x) - \frac{\alpha}{2}\|x\|^2$ est convexe.

Théorème 43 : Toute fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ α-convexe admet un unique minimiseur.

Application 44 (Gradient à pas fixe) : Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ α-convexe différentiable telle que ∇f soit lipschitzienne. Alors il existe $\rho^* > 0$ tel que, pour tout $0 < \rho < \rho^*$, la suite définie par : $\begin{cases} x_0 \in \mathbb{R}^n \\ x_{n+1} = x_n - \rho \nabla f(x_n) \end{cases}$ converge vers l'unique minimiseur de f.

Théorème 45 (Application de Krein-Milman) : Soit $K \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble convexe et compact, et soit $f : K \to \mathbb{R}$ continue et convexe. Alors f admet son maximum en un point extrémal de K.

Remarque 46 : Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une forme linéaire, alors $f_{|K}$ admet également son minimum en un point extrémal de K.

Proposition 47 (Courbe brachistochrone) : On se place dans le plan $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère $(O, \vec{e_x}, \vec{e_y})$. On considère un point $B(x_B, y_B)$ avec $x_B > 0, y_B > 0$. Alors la courbe reliant O et B permettant à un mobile lâché en O, sans vitesse initiale, et glissant sur cette courbe, de rejoindre B en un temps minimal est paramétrée par les équations :

$$\begin{cases} x(\theta) = R(\theta - \sin(\theta)) \\ y(\theta) = R(1 - \cos(\theta)) \end{cases}, \theta \in [0, \theta_0] \text{ avec } \theta_0 \in (0, 2\pi) \text{ et } R > 0.$$

(ANNEXE). DEV 1

Remarque 48 : Il s'agit d'un arc de cycloïde.

C - Optimisation en dimension infinie

a) Topologies faibles

Définition 49 : On appelle topologie faible sur E la plus petite topologie rendant continues les applications de E'.

Théorème 50 (Hahn-Banach géométrique) 1) Soient $A \subset E$, $B \subset E$ deux parties convexes de E, avec A ouvert. Alors il existe $\Phi \in E'$ non-nul et $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que : $\Phi(a) \leq \alpha \ \forall a \in A$ et $\Phi(b) \geq \alpha \ \forall b \in B$. (A et B disjoints)

2) Soient $A \subset E$ et $B \subset E$ deux ensembles convexes non-vides disjoints avec A fermé et B compact. Alors il existe $\Phi \in E'$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\sup_A \Phi < \alpha < \inf_B \Phi.$$

Remarque 51 : Si E est un Hilbert, cela découle du théorème de projection sur un convexe fermé.

Application 52 (Mazur) : Soit $C \subset E$ un ensemble convexe. Alors C est fermé dans $(E, \|\cdot\|)$ si et seulement si C est fermé pour la topologie faible sur E.

Théorème 53 (Kakutani) : Si E est réflexif alors la boule unité de E est compacte pour la topologie faible.

Application 54 : Si E est réflexif et E' séparable, alors, si $A \subset E$ est convexe et $\varphi : A \to \mathbb{R}$ est convexe, continue et coercive, alors φ atteint son minimum.

Remarque 55 : Le résultat est « plus simple » à montrer si E est un Hilbert, avec le théorème de projection sur un convexe fermé.

b) Optimisation « duale ».

Définitions 56 : Soit $\varphi : E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction convexe. On appelle alors :
- domaine de φ l'ensemble $D(\varphi) := \{x \in E \mid \varphi(x) < +\infty\}$.
- fonction conjuguée de φ, la fonction $\varphi^* : E' \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $f \mapsto \sup_{x \in E} (f(x) - \varphi(x))$

Proposition 57 : Si $\varphi : E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est convexe, alors φ^* est convexe.

~~Exemple 58 : Si $K \subset E$ est un convexe fermé non-vide, alors en notant $I_K : x \mapsto \begin{cases} 0 \text{ si } x \in K \\ +\infty \text{ si } x \notin K \end{cases}$, on a : $d(x_0, K) = \max_{f \in E'}$~~

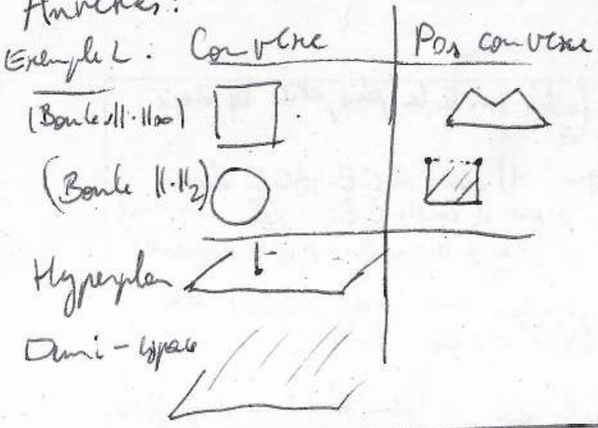
Théorème 58 (Fenchel-Rockafellar) : Soient φ et ψ deux fonctions convexes sur E. On suppose qu'il existe $x_0 \in E$ tel que $\varphi(x_0) < +\infty$, $\psi(x_0) < +\infty$ et φ continue en x_0. Alors :

$$\inf_{x \in E} (\varphi(x) + \psi(x)) = \sup_{f \in E'} (-\varphi^*(-f) - \psi^*(f)) = \max_{f \in E'} (-\varphi^*(-f) - \psi^*(f))$$

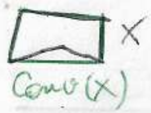
DEV 2

Annexes :

Exemple 2 :

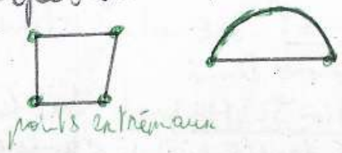


Définition 4 :



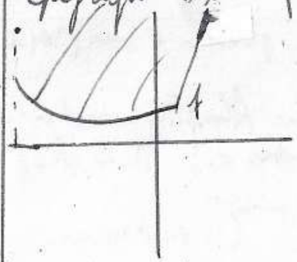
Définition 8 (Hyperplan d'appui)

Définition 10 (point extrémal)

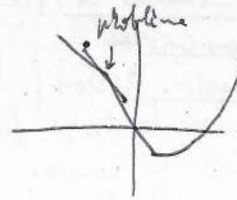


Proposition 15 :

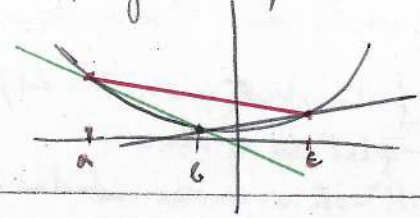
Épigraphe d'une fonction convexe :



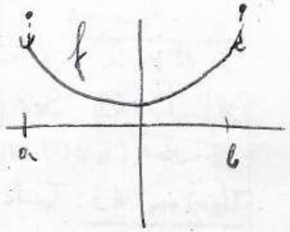
Épigraphe d'une fonction non convexe :



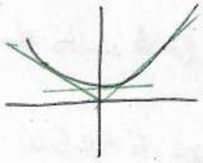
Proposition 16 (inégalité des pentes)



Application 17, contre-exemple :



Proposition 19 :



Courbe brachistochrone (Prop. 47) :