Lectures dirigées de recherche

Contrôlabilité des systèmes différentiels en dimension finie

Alice MORINIÈRE, Matthias HOSTEIN
Encadrante: Mégane Bournissou

ENS Rennes

7 Avril 2022

Table des matières

Qu'est-ce que le contrôle ?

Définition

On appelle système de contrôle :

$$\dot{x} = f(t, x, u),$$

où à l'instant t*,* $x = x(t) \in \mathbb{R}^n$ *représente l'état du système et* $u = u(t) \in \mathbb{R}^k$ *représente le contrôle.*

Exemples de contrôles :

- Position d'une voiture, contrôle de l'accélération, du volant
- Température d'une pièce, contrôle avec utilisation d'un chauffage

Différentes variantes :
Locale, globale, en temps long, en temps petit, approchée, à zéro.

Formalisation mathématique dans le cas linéaire

Définition

On appelle système de contrôle linéaire le système :

$$(C) : \begin{cases} \dot{x}(t) & = & A(t)x(t) + B(t)u(t), \\ x(T_0) & = & x^0. \end{cases}$$

Proposition

Quels que soient $A \in \mathscr{C}^0([T_0, T_1], \mathscr{M}_n(\mathbb{R}))$ *et* $B \in \mathscr{C}^0([T_0, T_1], \mathscr{M}_{n,k}(\mathbb{R}))$*, le problème de Cauchy* (C) *admet une unique solution dans* $\mathscr{C}^0([T_0, T_1], \mathbb{R}^n)$*.*

Définition de la contrôlabilité

Définition

On dit que le système linéaire $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$ est ***contrôlable*** *si, pour tout instant initial $T_0 \geq 0$ et pour tout instant final $T_1 > T_0$, on a : pour tout départ $x^0 \in \mathbb{R}^n$, et pour toute cible $x^1 \in \mathbb{R}^n$, il existe $u \in L^\infty\left([T_0, T_1], \mathbb{R}^k\right)$ tel que la solution du problème de Cauchy (C) vérifie $x(T_1) = x^1$.*

Rappel sur la résolvante

Définition

On appelle résolvante R du système $\dot{x} = A(t)x$ l'application

$$\begin{aligned} R : [T_0, T_1]^2 &\longrightarrow \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \\ (t, t_0) &\longmapsto R(t; t_0), \end{aligned}$$

telle que pour tout $t_0 \in [T_0, T_1]$, l'application $R(\cdot; t_0)$ est la solution du problème de Cauchy

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \dot{R}(t; t_0) & = & A(t)R(t; t_0), \quad \forall t \in [T_0, T_1], \\ R(t_0; t_0) & = & Id_n. \end{array} \right.$$

Formule de Duhamel

Proposition (Formule de Duhamel)

L'unique solution du problème de Cauchy suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{x}(t) & = & A(t)x + b(t), \quad \forall t \in [T_0, T_1] \\ x(T_0) & = & x^0, \end{array}\right.$$

est donnée par

$$\forall t \in [T_0, T_1], \qquad x(t) = R(t, T_0)x^0 + \int_{T_0}^{t} R(t,\tau)b(\tau)\mathrm{d}\tau.$$

Exemple (Calcul de résolvante)

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{x}_1 & = & u, \\ \dot{x}_2 & = & x_1 + tu. \end{array}\right.$$

Critère de la matrice Gramienne

Définition

On appelle matrice Gramienne la matrice symétrique suivante :

$$\mathfrak{C} = \int_{T_0}^{T_1} R(T_1,\tau)B(\tau)B(\tau)^{tr}R(T_1,\tau)^{tr}\,\mathrm{d}\tau.$$

Théorème

Le système $\dot{x} = A(t)x + B(t)u$ est contrôlable si et seulement si la matrice $\mathfrak{C}$ est inversible.

Exemples d'application

Exemple

Reprenons le système

$$\begin{cases} \dot{x_1} &= u, \\ \dot{x_2} &= x_1 + tu. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{C} &= \int_0^T R(T,\tau)B(\tau)B(\tau)^{tr}R(T,\tau)^{tr}\mathrm{d}\tau \\ &= \int_0^T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ T-\tau & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \tau \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \tau \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & T-\tau \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathrm{d}\tau \\ &= \begin{pmatrix} T & T^2 \\ T^2 & T^3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Alors $\det(\mathfrak{C}) = 0$. *Le système n'est pas contrôlable.*

Exemples d'application

Exemple

On considère cette fois un système autonome :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = u. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{C} &= \int_0^T R(T,\tau)B(\tau)B(\tau)^{tr}R(T,\tau)^{tr}\mathrm{d}\tau \\ &= \int_0^T \begin{pmatrix} 1 & T-\tau \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ T-\tau & 1 \end{pmatrix} \mathrm{d}\tau \\ &= \begin{pmatrix} \frac{T^3}{3} & \frac{T^2}{2} \\ \frac{T^2}{2} & T \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Alors $\det(\mathfrak{C}) = \frac{T^4}{12} \neq 0$. *Le système est contrôlable.*

Éléments de preuve

Deux preuves sont envisagables :
La pemière utilise le critère de surjectivité suivant :

Théorème

Soient $(H_1, \|\cdot\|_{H_1})$ et $(H_2, \|\cdot\|_{H_2})$ deux espaces de Hilbert et soit $\mathscr{F} \in \mathscr{L}_c(H_1, H_2)$. Alors, il y a équivalence entre les propriétés suivantes.

1. *$\mathscr{F}$ est surjective.*
2. $\exists c > 0, \forall y \in H_2, \|\mathscr{F}^*(y)\|_{H_1} \geq c\|y\|_{H_2}$.

Éléments de preuves

Etape 1 : Lien avec la surjectivité : Formule de Duhamel :

$$\forall t \in [T_0, T_1], \quad x(t) = R(t, T_0)x^0 + \int_{T_0}^{t} R(t,\tau)B(\tau)u(\tau)\mathrm{d}\tau.$$

La contrôlabilité du système équivaut à la surjectivité de l'application

$$\begin{aligned} \mathscr{F} : L^2((T_0, T_1), \mathbb{R}^n) &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ u &\longmapsto \int_{T_0}^{T_1} R(T_1,\tau)B(\tau)u(\tau)\mathrm{d}\tau. \end{aligned}$$

Elements de preuve

Etape 2 : Trouver l'adjoint

$$\begin{aligned}\langle \mathscr{F}(u), y\rangle &= \int_{T_0}^{T_1} u(t)^{tr} B(t)^{tr} R(T_1, t)^{tr} y \mathrm{d}t \\ &= \langle u, t \mapsto B(t)^{tr} R(T_1, t)^{tr} y\rangle_{L^2((T_0,T_1),\mathbb{R}^n)}\end{aligned}$$

Etape 3 : Montrer la surjectivité

$$\|\mathscr{F}^*(y)\|_{L^2((T_0,T_1),\mathbb{R}^k)} \geq c|y| \iff y^{tr}\mathfrak{C}y \geq c^2|y|^2$$

Éléments de preuve

La seconde construit explicitement un contrôle donné par l'expression :

$$\tilde{u}(\tau) = B(\tau)^{tr} R(T_1, \tau)^{tr} \mathfrak{C}^{-1}(x^1 - R(T_1, T_0)x^0).$$

En fait, ce contrôle est le contrôle qui minimise la norme L^2.

Proposition

Soit $(x^0, x^1) \in (\mathbb{R}^n)^2$ et soit $u \in L^2((T_0, T_1), \mathbb{R}^k)$ tel que la solution du problème de Cauchy (C) vérifie $x(T_1) = x^1$. Alors

$$\int_{T_0}^{T_1} |\tilde{u}(t)|^2 \mathrm{d}t \leq \int_{T_0}^{T_1} |u(t)|^2 \mathrm{d}t,$$

avec égalité si et seulement

$$u(t) = \tilde{u}(t) \text{ pour presque tout } t \in (T_0, T_1).$$

Exemple d'application

Exemple

On cherche cette fois à construire pour le système

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = u. \end{cases}$$

le contrôle minimisant la norme L^2 *et permettant de relier* $X^0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ *et* $X^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. *On trouve* $\tilde{u}(t) = \frac{12}{T^3}\left(\frac{T}{2} - t\right)$ *et alors*

$$\forall t \in [0, T], \quad X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{12}{T^3}\left(\frac{T}{4}t^2 - \frac{t^3}{6}\right) - 1 \\ \frac{12}{T^3}\left(\frac{T}{2}t - \frac{t^2}{2}\right) \end{pmatrix}$$

et on vérifie alors bien que $X(T) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = X^1$.

Critère de Kalman

Dans le cas où A et B sont constantes, on a le critère suivant :

Théorème

Le système (C) est contrôlable si et seulement si :

$$Vect\left\{A^i Bu \colon i \in [\![0, n-1]\!], u \in \mathbb{R}^k\right\} = \mathbb{R}^n.$$

Exemple d'application

Exemple

On reprend le système :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = u. \end{cases}$$

qui équivaut à :

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

et donc

$$A^0 B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } A^1 B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi

$$Vect\{ A^i Bu \; : \; i \in \{0, 1\}, \; u \in \mathbb{R} \} = \mathbb{R}^2.$$

On retrouve que le système est contrôlable.