RETOUR ORAL ALGÈBRE ET GÉOMÉTRIE

HOSTEIN Matthias
3A Maths
ENS Rennes
Année 2023 - 2024

02/07/2024

Couplage

1. **106 : Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E. Sous-groupes de $\mathrm{GL}(E)$. Applications**,
2. 121 : Nombres premiers. Applications.

Quand je vois la leçon 106, qui est une leçon stylée où j'ai des développements stylés, je la prends sans hésiter.

Plan choisi

I - $\mathrm{GL}(E)$ et $\mathrm{SL}(E)$, générateurs. (Perrin, Rombaldi)
   1. Déterminant et $\mathrm{SL}(E)$,
   2. Centres et générateurs,
   3. Aspects combinatoires dans les corps finis.

II - Actions et sous-groupes remarquables de $\mathrm{GL}(E)$ (Rombaldi, Perrin)
   1. Translation et équivalence.
   2. Conjugaison et réduction.
   3. Stabilisateurs et autres sous-groupes remarquables.

III - Aspects topologiques et géométriques (Rombaldi, Alessandri, Mneimné-Testard).

Je suis content du plan, je l'avais déjà préparé pendant l'année mais cette fois j'ai pu rajouter la partie de combinatoire sur les corps finis qui est un vrai plus dans cette leçon. La partie I tourne autour de la simplicité de $\mathrm{PSL}(E)$ globalement, la partie II permet de mettre en valeur les aspects présentés dans le rapport du jury (stabilisateurs d'actions sur des sommes directes, des drapeaux, des formes quadratiques avec de la classification...) et qui est très bien présenté dans le Rombaldi, avec une sous-partie 2. qui n'a plus ou moins qu'un seul item : la réduction de Frobenius. J'ai pu mettre en annexe un tableau regroupant les différentes actions et les "formes normales" dans une orbite. La troisièle partie, enfin, traite du cas $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ avec de la topologie (compacité de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, densité de GL_n et connexité par arcs lorsque $K = \mathbb{C}$, connexité par arcs également de $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$,...) et également de la géométrie en lien avec la topologie (produits scalaires invariants sur les sous-groupes compacts de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$: mon premier développement, et une petite partie sur l'exponentielle et les groupes de Lie matriciels avec mon deuxième développement : le théorème de Cartan-Von Neumann disant que les sous-groupes fermés de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ sont des sous-variétés de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$).

Défense du plan

Je fais au tableau un triangle avec un sommet algèbre linéaire, un sommet géométrie et un sommet groupe et j'ai mis au milieu GL(E) (celui qui unifie le tryptique) et ça justifiait donc l'intérêt de ce groupe. J'ai dit que la partie I traitait plutôt de l'aspect groupe (générateurs, centres, simplicité...), la partie II faisait le lien entre groupes et algèbre linéaire en regardant des actions sur des objets particuliers (sommes directes, drapeaux, formes quadratiques). Enfin je disais que la partie III traitait du lien entre groupes et géométrie avec un peu de topologie en plus.

Développements choisis

1. Sous-groupes compacts de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$,
2. **Théorème de Cartan-Von Neumann**.

C'est très drôle : mon camarade Baptiste m'avait dit la veille, quand je suis arrivé pour poser mes affaires dans la bagagerie "T'inquiète pas, tu vas gérer et tu vas passer sur Cartan-Von Neumann !" quel devin ! Bref, j'enchaîne bien les étapes et je finis en 14 minutes 20, ce qui fait que j'ai un peu le temps de détailler pourquoi $T_{I_n}G = \mathfrak{g}$.

Questions posées

I - Développement

1. Où est-ce qu'on utilise, dans le développement, que $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}'$ (un supplémentaire) sont supplémentaires ? Je réponds que ça intervient clairement pour appliquer le théorème d'inversion locale à la fonction :

$$\begin{array}{rccc} \Phi & : & \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}' & \longrightarrow & \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \\ & & (M, M') & \longmapsto & \exp(M)\exp(M'). \end{array}$$

   en $(\mathbf{O}_n, \mathbf{O}_n)$.

2. Réexpliquer pourquoi il existe un voisinage $W \in \mathscr{V}_{\mathfrak{g}'}(\mathbf{O}_n)$ tel que $\exp(W) \cap G = \{I_n\}$. On utilise le lemme que j'ai montré précédemment :

Lemme 0.1. Soit $(H_k)_{k\in\mathbb{N}} \in G^{\mathbb{N}}$ tel que :

$$H_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} I_n$$

et :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad H_k \neq I_n.$$

Alors toute valeur d'adhérence de la suite $\left(\dfrac{\mathrm{Log}(H_k)}{\|\mathrm{Log}(H_k)\|}\right)$ (bien définie à partir d'un certain rang) appartient à l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$.

En effet, grâce à ce lemme, on raisonne par l'absurde : si pour tout voisinage W de $\mathbf{O}_n$ dans $\mathfrak{g}'$, $\exp(W) \cap G \neq \{I_n\}$, alors on a :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \exp\left(B_{\mathfrak{g}'}\left(\mathbf{O}_n, \frac{1}{k}\right)\right) \cap G \neq \{I_n\}.$$

On a donc à disposition une suite $H_k = \exp(N_k)$ avec $N_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$, $N_k \in \mathfrak{g}'$ et $H_k \in G \setminus \{I_n\}$. Ainsi, d'après le lemme, les valeurs d'adhérence de la suite $\left(\dfrac{N_k}{\|N_k\|}\right)$ sont dans $\mathfrak{g}$, mais également dans $\mathfrak{g}'$ par fermeture de ce sous-espace vectoriel de dimension finie ! **ABUSRDE !**

3. Comment est défini l'exponentielle/le logarithme de matrice ? Si on prend une norme d'algèbre sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, alors, pour tout $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, la série :

$$\sum_{k\geqslant 0} \frac{M^k}{k!}$$

converge absolument, donc converge. Cela définit donc une application exp. Par convergence normale, on montre que exp est en fait de classe $\mathscr{C}^\infty$. De même, pour toute matrice $M \in B(I_n, 1)$, la série :

$$\sum_{k\geqslant 1} (-1)^{k-1} \frac{(M-I_n)^k}{k}$$

converge absolument, donc converge. Cela définit une application Log et on vérifie qu'il s'agit de la réciproque de exp sur ce voisinage.

4. Redéfinir ce qu'est une sous-variété et l'espace tangent en un point. Je bugue un peu mais en refaisant un dessin j'arrive à retrouver la définition. Dans mon développement, j'ai utilisé la définition suivante de l'espace tangent en un point x d'une sous-variété M de $\mathbb{R}^n$:

$$T_x M = \{\gamma'(0),\ \gamma : (-1,1) \longrightarrow M,\ \gamma(0) = x\}.$$

II - Plan

1. Item 4 : ça veut dire quoi ? J'avais mis la suite exacte :

$$\{e\} \to \mathrm{SL}(E) \hookrightarrow \mathrm{GL}(E) \overset{\det}{\twoheadrightarrow} K^* \to \{e\}$$

en disant que ça permettait de montrer l'isomorphisme suivant :

$$\mathrm{GL}(E) \simeq \mathrm{SL}(E) \rtimes K^*.$$

Je réexplique donc quelle est la loi du produit semi-direct : on la trouve à partir d'une section du déterminant, qui doit être un morphisme de groupes :

$$\begin{array}{rcl} K^* & \longrightarrow & \mathrm{GL}(E) \\ \lambda & \longmapsto & D_\lambda := \mathrm{Diag}(1, \ldots, 1, \lambda). \end{array}$$

et on a la loi :

$$\forall (M_1, M_2, \lambda_1, \lambda_2) \in \mathrm{SL}(E)^2 \times (K^*)^2, \quad (M_1, \lambda_1) \rtimes (M_2, \lambda_2) = (M_1 D_{\lambda_1} M_2 D_{\lambda_1}^{-1}, \lambda_1 \lambda_2),$$

de sorte que l'application :

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{SL}(E) \rtimes K^* & \longrightarrow & \mathrm{GL}(E) \\ (M, \lambda) & \longmapsto & M D_\lambda \end{array}$$

soit un isomorphisme de groupe. Le jury a l'air content.

2. Redémontrer les formules des cardinaux sur les corps finis. Pour rappel :
   — $|\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)| = (q^n - 1)(q^n - q) \ldots (q^n - q^{n-1})$.
   — $|\mathrm{SL}_n(\mathbb{F}_q)| = |\mathrm{PGL}_n(\mathbb{F}_q)| = \dfrac{|\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)|}{q-1}$,
   — $|\mathrm{PSL}_n(\mathbb{F}_q)| = \dfrac{|\mathrm{SL}_n(\mathbb{F}_q)|}{n \wedge (q-1)}$.

   Les parties délicates à justifier sont le cardinal de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ et celui de $\mathrm{PSL}_n(\mathbb{F}_q)$. Pour GL_n, on dénombre les bases sur $\mathbb{F}_q^n$: le premier vecteur de base doit être non-nul : $q^n - 1$ choix. Le deuxième vecteur de base doit être non-colinéaire au premier. On retire donc un sev de dimension 1 : $q^n - q$ choix. Le troisième vecteur de base ne doit pas être dans le plan engendré par les deux premiers vecteurs de base : $q^n - q^2$ choix, etc. Enfin, pour justifier le cardinal de $\mathrm{PSL}_n(\mathbb{F}_q)$, il faut dire que le centre de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{F}_q)$ est constitué des homothéties qui sont dans $\mathrm{SL}_n(\mathbb{F}_q)$. Ce doit donc être des homothéties de rapport une racine n-ième de l'unité dans $\mathbb{F}_q$. Il ne reste donc plus qu'à justifier qu'il y a $n \wedge (q-1)$ racines n-ième de l'unité dans $\mathbb{F}_q$. Si $\delta := n \wedge (q-1)$, on montre que les racines n-ièmes de l'unité dans $\mathbb{F}_q$ sont des racines δ-ièmes de l'unité dans $\mathbb{F}_q$ grâce au théorème de Lagrange, et enfin, le polynôme $X^\delta - 1$ est scindé à racines simples dans $\mathbb{F}_q$ étant donné qu'il divise $X^{q-1} - 1$ qui est scindé à racines simples dans $\mathbb{F}_q$: il y a donc exactement δ racines δ-ièmes de l'unité dans $\mathbb{F}_q$, et donc il y a δ racines n-ièmes de l'unité dans $\mathbb{F}_q$.
3. Redémontrer que les éléments de $\mathrm{O}(q)$, pour q une forme quadratique non-dégénérée sont produits d'au plus n réflexions. Je réponds que dans le cas général c'est très dur (c'est un de mes développements). Elle me demande donc dans le cas euclidien. Je refais sans problèmes avec un dessin (qu'ils m'ont demandé de refaire parce qu'au début il était trop petit), puis la dame qui m'a posé la question me demande ce que ça donne en dimension 2. Je fais un dessin avec une rotation et je dis que ladite rotation s'écrit comme produit de deux réflexions. La dame me demande alors en dimension 3. Je suis

un peu perdu, et elle me demande "c'est quoi les éléments de $O_3(\mathbb{R})$?" Je commence donc à lister : les rotations, les anti-rotations,... et enfin elle me demande "du coup elles s'écrivent comme produit de combien de réflexions ?" du coup je dis "euh au plus 3 du coup" et elle a l'air satisfaite. J'ai pas trop compris du coup. Elle me demande enfin si je connais les grandes lignes de la démonstration dans le cas général. Je dis qu'il faut distinguer les cas selon s'il y a des vecteurs fixes isotropes ou non. Globalement j'écris les étapes de mon développement et elle a l'air satisfaite.

III - Exercice

1. On considère $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{R}$-evn de dimension finie et on suppose que le groupe $\mathrm{O}(E) := \{u \in \mathrm{GL}(E) \mid \forall x \in E, \quad \|u(x)\| = \|x\|\}$ agit transitivement sur la sphère unité. Montrer que la norme $\|\cdot\|$ est euclidienne. V'là l'exo ! Je suis complètement perdu au début et j'essaie de montrer que la norme vérifie l'identité du parallélogramme et je n'y arrive pas. Ensuite le monsieur du jury me demande ce que je sais sur le groupe $\mathrm{O}(E)$. Je réponds qu'il est compact. Le monsieur me demande pourquoi et je réponds qu'il est fermé et borné. Et ensuite le monsieur du jury me dit "donc il possède un produit scalaire invariant." J'étais pas prêt du tout à utiliser ce résultat ! On a donc à disposition une norme euclidienne $\|\cdot\|_e$ sur E tel que les éléments de $\mathrm{O}(E)$ stabilisent cette norme. Je dis donc ensuite qu'il suffit de montrer que $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|_e$ sont égales. Le monsieur du jury me fait raffiner en disant qu'il suffit de montrer qu'elles sont égales sur la sphère unité pour $\|\cdot\|$ puis, par transitivité de l'action de $\mathrm{O}(E)$ sur la sphère, il suffit de montrer qu'elles sont égales en un seul vecteur. Puis il me demande s'il n'y a qu'un seul produit scalaire invariant. Là j'étais trop perturbé, du coup j'ai dit "euh oui ? Je sais pas." Le monsieur du jury me dit donc qu'on peut multiplier le produit scalaire invariant par un scalaire strictement positif, et ça restera un produit scalaire invariant. On s'est arrêté là mais du coup en y réfléchissant, si on prend x tel que $\|x\| = 1$, on a juste à renormaliser la norme euclidienne invariante par $\|x\|_e$ pour avoir $\|x\|_e = 1$ et donc on en conclut que $\|\cdot\| = \|\cdot\|_e$: c'est une norme euclidienne.

Bilan

J'étais très content de mon plan, de la présentation de mon développement et de ma capaciter à répondre aux questions sur le plan. Cependant, le dernier exo m'a trop perturbé pour que je puisse le résoudre avant la fin. Les membres du jury étaient très gentils et mettaient à l'aise : ils me laissaient boire quand je le voulais, ils me laissaient prendre des pauses si j'étais stressé etc. Un truc qui m'a étonné par contre c'est qu'ils me demandaient beaucoup de détailler. Je pensais au début qu'il suffisait de donner les idées pour que ça passe, mais des fois j'ai dû détailler à fond (je crois que c'était sur les questions auxquelles j'étais pas sûr au premier abord). J'ai eu au final 19,75.