RETOUR ORAL ANALYSE ET PROBABILITÉS

HOSTEIN Matthias

3A Maths

ENS Rennes

Année 2023 - 2024

03/07/2024

Couplage

1. 243 : Séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications,
2. **244 : Exemples d'études et d'applications de fonctions usuelles et spéciales**.

Un couplage qui ne m'avantageait pas vraiment. La leçon séries entières doit pouvoir contenir beaucoup de choses de bases que j'ai peur d'oublier, et j'avais peur qu'un de mes développements (densité des fonctions $\mathscr{C}^\infty$ nulle part analytiques) ne rentre pas si bien. La leçon fonctions usuelles et spéciales, quant à elle, joue beaucoup sur la culture mathématique et la difficulté peut augmenter très vite. J'ai quand même pris fonctions spéciales parce que je me disais que ça irait, j'avais le petit livre *Les fonctions spéciales vues par les problèmes* qui m'a bien servi.

Plan choisi

I - Fonctions usuelles de l'analyse réelle et complexe [Groux-Soulat, Tauvel, Amar-Mathéron, Candelpergher]
   1. Exponentielle, logarithme et fonctions circulaires.
   2. Γ et ses proches voisins.
   3. Liens avec les probabilités.

II - Séries de Dirichlet et un peu de théorie des nombres [Gourdon, Tenenbaum, Groux-Soulat, Amar-Mathéron]
   1. Généralités sur les séries de Dirichlet
   2. ζ et les nombres premiers.

III - Fonctions spéciales de la physique et de l'analyse numérique [Berthelin, El Amrani, Demailly, Rombaldi analyse réelle].
   1. Polynômes orthogonaux et intégration numérique.
   2. Liens avec la physique.

Il me manquait un peu de temps pour détailler davantage la partie II.2 où j'aurais pu évoquer le prolongement de la fonction ζ sur $\mathbb{C} \setminus \{1\}$, et je n'ai pas eu le temps pour évoquer les fonctions de Bessel que j'aurais pu mettre en III.2 car elles sont des fonctions propres du Laplacien en coordonnées cylindriques et je n'ai pas non plus eu le temps de mettre une partie équation de la chaleur qui pouvait bien rentrer dedans je pense. Le plan faisait au final 2 pages et demie, mais j'avais tout de même 48 items je crois. La partie I parlait donc des propriétés de l'exponentielle, du logarithme complexe et des fonctions circulaires, avec notamment le développement en série de la fonction cotangente grâce aux séries de Fourier, et aussi le développement en produit de la fonction sinus qui en découle. Vient ensuite la fonction Γ, son prolongement, le fait qu'elle soit log-convexe, la formule de Weierstrass pour l'inverse de Γ et le lien avec la fonction B et le volume de la boule euclidienne en dimenson n. J'ai également mis la formule des compléments qui était mon premier développement. Enfin, dans la partie probabilités, j'illustrais l'importance des fonctions exponentielle et Γ grâce aux lois gaussiennes et Γ : stabilité par somme indépendante et également stabilité par convergence en loi pour la loi gaussienne. La partie II était une partie assez élémentaire et courte sur les séries de Dirichlet. La première partie définissait l'abscisse de convergence absolue d'une série de Dirichlet et également le lien entre le produit de deux séries de Dirichlet et la convolution arithmétique. J'ai pu, grâce à ça, mettre un petit ordre moyen de l'indicatrice d'Euler en application ! La série de Dirichlet la plus connue étant la fonction ζ, il est naturel qu'elle vienne ensuite. J'ai mis mon deuxième développement qui est le développement en produit de ζ indicé selon les nombres premiers, avec en application la divergence de la série des inverses des nombres premiers. J'ai rajouté également une formule faisant le lien entre ζ et Γ, en vue du prolongement de ζ sur $\mathbb{C} \setminus \{1\}$, et un petit aparté sur les séries L de Dirichlet, qui permettent de montrer le théorème de la progression arithmétique. Enfin, la troisième partie s'attarde sur l'étude des polynômes orthogonaux, leurs propriétés et leur utilisation en physique (les fonctions de Hermite étant des fonctions propres de la transformée de Fourier et de l'oscillateur harmonique quantique, et les polynômes de Legendre apparaissant pour la résolution de l'équation de Laplace en sphérique par séparation des variables) et en intégration numérique (la quadrature de Gauss). Je m'étais dit que j'aurais pu faire mieux, mais le plan était bon j'ai trouvé.

Défense du plan

Je commence par définir plus ou moins ce que c'est qu'une fonction spéciale, ce qui me permet de justifier ma troisième partie, sans omettre bien évidemment les fonctions Γ et ζ qui apparaissent dans mes deux premières parties. J'écris donc les grandes parties de mon plan au tableau, en expliquant qu'il s'agit d'un plan thématique selon les applications possibles (I : intégration, probabilités, analyse complexe, II : théorie des nombres, III : physique et analyse numérique). Je suis ensuite rentré plus dans les détails de mon plan. J'ai pensé à dire que les séries L servaient à montrer le théorème de la progression arithmétique, mais j'ai oublié de dire que la formule des compléments pouvait servir à montrer le prolongement méromorphe de ζ. Dommage.

Développements choisis

1. Formule des compléments,
2. **Fonction ζ et nombres premiers**.

Je suis étonné de voir que le jury choisiss le développement le plus "facile", mais soit. Je stresse un peu au début car je ne l'ai pas forcément refait au tableau et je n'ai pas vraiment eu le temps de le revoir pendant ma préparation. J'ai également peur qu'il soit un peu trop court. Tant pis, on y va. Je détaille au maximum pour pouvoir faire le plus long possible. J'ai une petite erreur dans mon inégalité concernant la comparaison série-intégrale pour ζ mais je corrige vite. Je finis le développement en à peu près 12 minutes 30 mais je complète rapidement avec l'application au fait qu'il n'y a pas de loi de probabilité sur $(\mathbb{N}^*, \mathscr{P}(\mathbb{N}^*))$ telle que la proba d'être un multiple de k soit $1/k$. Ça dure au total 13 minutes 30.

Questions posées

I - Développement

1. Corriger une erreur : un $+1$ s'était transformé en -1, je corrige, pas de problème.
2. Réexpliquer pourquoi on a l'égalité :

$$\mathbb{P}_s\left(\bigcap_{i=1}^{n}(p_i\mathbb{N}^*)\right) = \mathbb{P}_s\left(\left(\prod_{i=1}^{n} p_i\right)\mathbb{N}^*\right).$$

   Je dis qu'en fait on a égalité des deux ensembles dans les proba car les p_i étant des nombres premiers distincts, ils sont premiers entre eux. Le monsieur du jury n'a pas l'air de bien comprendre, du coup je dis "si p et q sont deux entiers qui divisent a, alors le ppcm de p et q divise a et réciproquement". Le monsieur n'a toujours pas l'air de comprendre, je réponds "c'est la définition du ppcm". Le monsieur demande alors où est-ce qu'on utilise le fait qu'ils sont premiers distincts. Je dis alors que c'est pour pouvoir dire que le ppcm c'est le produit. Il a l'air convaincu.

II - Plan

1. Remontrer comment on définit le logarithme avec l'argument. Je bugue un peu puis je dis qu'on a une expression explicite avec du arccos. Ainsi, on a la continuité. Il me demande maintenant pour l'holomorphie de Log. Là j'ai un éclair de génie : il faut utiliser les conditions de Cauchy-Riemann. Du coup j'écris en coordonnées dans $\mathbb{R}^2$:

$$\log(x+iy) = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right) + i\arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

   et je récupère Cauchy-Riemann. Cependant, dans mon calcul, j'avais modifié le terme

$$\arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

   en $\arctan\left(\frac{y}{x}\right)$, ce qui faisait qu'on n'avait pas tout le monde (on récupère juste le demi-plan supérieur) je dis que si on fait le calcul avec arccos c'est pareil et sinon pour récupérer le bout manquant on peut dire que $\arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ c'est $\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{x}{y}\right)$. Il a l'air convaincu mais pas trop non plus.
2. Une question de la dame : j'ai mis dans mon plan que Γ était log-convexe. Expliquer pourquoi. Bon pas de soucis, je réécris la définition d'être log-convexe et avec Hölder

c'est plié. Maintenant : montrer la réciproque. Évidemment Bohr-Mollerup c'était la suite logique mais je l'avais pas mis dans le plan exprès parce que je le connaissais pas tant que ça. Bon en tous cas je dis juste qu'il suffit dans ce cas de montrer que, si f est ma fonction log-convexe, $f = \Gamma$ sur $(0,1]$ et qu'on utilisait la limite suivante :

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!n^x}{x(x+1)\dots(x+n)}.$$

Enfin j'ai écrit l'inégalité qui faisait marcher un peu :

$$f(nx + (1-x)(n+1)) = f(n+1-x) \leqslant (n+1)^x n!.$$

J'ai dit qu'on devait trouver un encadrement comme ça avec des suites équivalentes à celle qui tend vers Γ. Elle a dit oui et elle est passée à autre chose.

3. Dernière question sur le plan : j'ai mis que les séries de Dirichlet étaient holomorphes sur un demi-plan droit $\mathbb{H}_{\sigma_c}$ en disant que σ_c était l'abscisse de convergence (et non pas de convergence absolue !) du coup il me demande comment montrer que c'est holomorphe sur ce demi-plan. Je dis qu'on utilise le théorème d'holomorphie sous la somme et du coup c'est là où ça coinçait que j'aie pas mis que c'était une abscisse de convergence absolue. Du coup je dis que c'est une erreur et tout mais ils me disent oui ok mais du coup quel type de convergence vous récupérez. Je sais pas s'il parlait de avec convergence absolue ou sans mais du coup je dis convergence simple. Il me corrige du coup je dis ah convergence uniforme sur tous compacts. Il me demande si on a mieux. Je dis ah oui convergence normale sur tous compacts. Il me dit c'est ça. Et il me demande comment on peut s'en sortir sans convergence absolue. Je propose comparaison série-intégrale mais c'est des complexes. Je réfléchis un peu, je dis "Euler-MacLaurin" il me dit "plus simple". Il me dit "c'est une série complexe semi-convergente". Du coup je dis "ah oui une règle d'Abel" il me dit oui c'est ça. On s'est arrêté là pour l'oral, mais avant cette question, un monsieur m'a posé un exercice :

III - Exercice

1. Démontrer l'inégalité de Heisenberg. Moi je suis content, c'est un de mes développements je fais ça sans hésiter. Je lui dis que je connais et tout et je balance la preuve. Après il me dit euh ok mais utilisez un résultat de votre plan. Je suis perplexe et je dis "euh les fonctions de Hermite peut-être ?" Il me dit oui c'est ça, du coup je fais le calcul en utilisant le fait que les fonctions de Hermite étaient des fonctions propres de Fourier. Au final j'y arrive pas trop et puis il me dit "nan mais faut montrer la version additive". Je suis en mode whaaat ? J'étais parti pour minorer :

$$\left(\int_{\mathbb{R}} |xf(x)|^2 \mathrm{d}x\right) \times \left(\int_{\mathbb{R}} |\xi \hat{f}(\xi)|^2 \mathrm{d}\xi\right)$$

mais le monsieur voulait me faire minorer :

$$\left(\int_{\mathbb{R}} |xf(x)|^2 \mathrm{d}x\right) + \left(\int_{\mathbb{R}} |\xi \hat{f}(\xi)|^2 \mathrm{d}\xi\right)$$

(En fait en utilisant le fait que $a^2+b^2 \geqslant 2ab$ c'est potentiellement trivial avec Heisenberg multiplicatif du coup) Mais bon du coup je me dis ok, faut le montrer avec les fonctions de Hermite et puisque c'est une base hilbertienne de $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$, avec Pythagore/Bessel-Parseval on récupère pour toute les fonctions de $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$. Du coup en fait, si f est une fonction de Hermite, on récupère $\|xf\|_2^2 + \|f'\|_2^2$ (modulo la normalisation). Du coup bon je suis un peu bloqué et en fait c'est bon il fallait juste utiliser le fait que les fonctions de Hermite étaient des fonctions propres de l'oscillateur harmonique :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} h_n + x^2 h_n(x) = (2n+1) h_n(x).$$

. Il me demande si je connais le nom de la quantité $\|xf\|_2^2 + \|f'\|_2^2$. J'hésite je réponds "ah c'est genre l'impulsion" il me dit "bon c'est l'énergie en fait" bon tant pis.

Bilan

Je pensais avoir moins bien réussi que l'oral d'algèbre mais au final, j'ai eu 20 ! Je pense que c'est parce que la leçon est difficile, donc que peu de monde la prend, et j'ai mis quelques trucs que le jury n'a pas l'habitude de voir dans cette leçon. Au final, réfléchissez-y à deux fois avant de faire l'impasse sur cette leçon, ça peut vous rapporter gros ! Là encore, comme en algèbre, le jury était très sympathique et voulait me faire détailler beaucoup, surtout sur les premières questions.