

---

# RETOUR ORAL BLANC 1

---

**HOSTEIN Matthias**

3A Maths

ENS Rennes

Année 2023 - 2024

15/01/2024

# Couplage

1. **162 : Systèmes linéaires, opérations élémentaires ; aspects algorithmiques et conséquences théoriques,**
2. 190 : Méthodes combinatoires et problèmes de dénombrement.

J'ai beaucoup hésité (peut-être 5 bonnes minutes) entre les deux : j'avais préparé la semaine avant l'oral un métaplan que je trouvais solide pour les systèmes linéaires, mais d'un autre côté, la leçon combinatoire est très rigolote et c'est mon mémoire, donc j'avais un peu réfléchi aussi. J'ai finalement opté pour la sécurité en prenant la leçon sur les systèmes linéaires.

## Plan choisi

I - Aspects théoriques.

1. Définitions.
2. Discussions sur l'existence et l'unicité de solutions.
3. Opérations élémentaires, pivots de Gauss et conséquences théoriques.
4. Le cas des anneaux principaux.

II - Méthodes directes de résolution : cas des matrices carrées complexes

1. Décompositions LU et de Cholesky.
2. Mise sous forme QR.

III - Méthodes de résolution approchée.

1. Résolution au sens des moindres carrés.
2. Méthodes itératives.
  - a) Étude générale de la convergence.
  - b) Méthode de Jacobi.
  - c) Méthodes de Gauss-Seidel et SOR.
  - d) Accélération de la convergence.

Ça prend du temps de faire un plan satisfaisant !! J'aurais dû passer beaucoup moins de temps sur les définitions pour pouvoir mettre des choses plus intéressantes en partie II, notamment parler de formes tridiagonales pour les matrices symétriques et de formes de Hessenberg. J'aurais pu en profiter pour parler de forme normale de Hermite et pas juste de Smith, et également faire le lien entre la décomposition QR et la résolution au sens des moindres carrés. Bref au final, les 3 heures m'ont servi à faire le plan. Je suis arrivé à l'oral « à poil » au sens où je n'ai pas réécrit mes développements et donc si à un moment j'avais été bloqué sur les calculs pendant le développement, ç'aurait été finito pour moi.

## Défense du plan

J'ai décidé de faire un peu comme ce que j'avais fait pour les calculs d'intégrale, en prenant le plus de recul possible. Problème, je n'ai au final jamais regardé mon plan, ce qui fait que j'ai eu l'impression de divaguer pendant 4 minutes et j'ai dû rusher à la fin pour présenter mes deux développements (j'ai failli oublier de parler du cas des systèmes linéaires dans des anneaux et faire le lien avec la forme de Smith!!). Le jury a cependant apprécié la démarche. Donc faites ça mais ne vous perdez pas en route!

## Développements choisis

1. Forme normale de Smith
2. **Accélération de la convergence des méthodes itératives par la méthode de Tchebychev**

Samuel qui passait avant moi sur les décompositions de matrices avait déjà présenté la forme normale de Smith et le jury a décidé de prendre l'autre développement. C'était le développement le plus calculatoire et j'ai trouvé que je m'en étais plutôt bien tiré. Il me restait plus que les derniers calculs à la fin de mes 15 minutes, ce qui fait que j'ai pu m'arrêter là sans trop de problèmes et le jury n'a pas relevé que j'avais dépassé de 20 secondes.

## Questions posées

1. Résoudre le système

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x + z = 3 \\ y + 2z = 3 \end{cases}$$

par la méthode de Gram-Schmidt. Dans ma tête c'est la fête, j'ai jamais vu personne résoudre un système avec Gram-Schmidt, surtout que la réponse est évident et c'est  $(1, 1, 1)$ ! Donc bon au début je me dis « ok Matou, mets-moi cette matrice sous forme QR avec Gram-Schmidt ». Mais Fourquaux a décidé que non non! Il m'a demandé de plutôt agir sur les lignes!! J'ai donc fait un Gram-Schmidt comme j'ai pu et à la fin du calcul de la deuxième ligne, et alors que je n'avais aucune foutre idée d'où ça pouvait aller, Fourquaux m'a dit : « On vous fait confiance pour la suite des calculs. » La bonne ambiance.

2. Quelques questions sur le plan : détailler l'aspect « conséquences théoriques » de l'intitulé de la leçon. J'ai alors parlé que le pivot de Gauss permettait de montrer que le rang était un invariant total de l'action par équivalence, que  $SL_n(k)$  était engendré par les matrices de transvection, que  $GL_n(k)$  était engendré par les matrices de transvection et de dilatations, que ça servait également à calculer des noyaux ou des images d'applications linéaires, que ça

servait à déterminer si une famille de vecteurs était libre ou génératrice, que ça permettait de déterminer une équation de sous-espace, etc. Pour le cas des anneaux, j'ai parlé de la forme normale de Smith et de ses conséquences : théorème de la base adaptée, structure des modules de type fini sur un anneau principal et réduction de Frobenius. Le jury prof de Châteaubriand m'a également fait remarquer que le pivot de Gauss permettait de montrer qu'une matrice a même rang que sa transposée, et que ça correspondait au nombre de pivots non-nuls dans l'algorithme. J'ai pensé également après coup à un résultat rigolo (mais sans grand intérêt) qui dit que toute matrice s'écrit comme somme de deux matrices inversibles (la preuve que j'ai en tête nécessite que la caractéristique du corps soit différente de 2 cela dit).

3. J'ai parlé dans ma présentation orale du lien entre systèmes linéaires homogènes (second membre nul) et intersection de noyaux de formes linéaires données par les lignes de la matrice. On m'a demandé de détailler comment évoluait la dimension des solutions en fonction de ces formes linéaires. J'ai dit que lorsque deux formes linéaires sont indépendantes, la dimension de l'intersection des deux noyaux avait dimension  $n - 2$ , contre  $n - 1$  pour une seule forme linéaire. Après avoir bafouillé, j'ai dit que la dimension totale était  $n - r$  où  $r$  désignait le rang du système formé des formes linéaires. J'ai dû le montrer mais ça allait (passer à l'orthogonal pour la dualité c'est très efficace!).
4. On a parlé de matrices de transvection. Mais qu'en est-il des transvections en tant qu'endomorphismes? Est-ce que ça engendre  $SL(E)$ ? Oui.  $GL(E)$ ? Non, mais si on rajoute les dilatations alors oui. Montrer que les dilatations engendrent  $GL(E)$ . Aïe, j'ai beaucoup buggé mais il suffisait de dire que si on prend une transvection d'hyperplan  $\ker(\varphi)$ , alors composer à gauche par une dilatation d'hyperplan  $\ker(\varphi)$  donnait également une dilatation d'hyperplan  $\ker(\varphi)$ , pour peu qu'on la prenait différente de l'identité, ce qui n'est possible que lorsque le corps n'est pas  $\mathbb{F}_2$ . Dans ce cas, quel est le groupe engendré par les dilatations? J'ai re-buggé, elles étaient toutes égales à l'identité, donc en fait c'était juste  $\{id_E\}$ .

## Retours du jury

Le jury a trouvé ma leçon assez mal présentée : comme l'imprimante imprime en noir et blanc, il faut trouver un moyen pour que les titres de parties ressortent mieux. Et puis j'écrivais petit... De plus, ma deuxième page était à l'envers, ce qui n'aidait pas le jury pour se retrouver. Également, un des problèmes de ma leçon était que je ne réintroduisais pas les notations dans mes propositions/théorèmes! Faites-le, le jury est perdu sinon. Pour le développement notamment, ils étaient perdus parce que mon énoncé n'introduisait pas toutes les notations... je les avais remises au tableau mais ce n'était pas assez. Bref, faites des énoncés propres et auto-suffisants comme dirait Romagny dans son pdf sur comment écrire des documents scientifiques. À part ça, le jury a trouvé le niveau solide et a apprécié mon attitude au tableau (notamment quand il fallait résoudre

le système avec Gram-Schmidt mdr). Le jury a globalement été content du niveau de notre groupe pour cet oral blanc !