
RETOUR ORAL BLANC 2

HOSTEIN Matthias

3A Maths

ENS Rennes

Année 2023 - 2024

12/04/2024

Couplage

1. **206 : Exemples d'utilisation de la dimension finie en analyse,**
2. 226 : Suites réelles et vectorielles définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.
Exemples. Applications à la résolution approchée d'équations.

C'est, selon moi, un super couplage ! La leçon 206 est celle où j'avais les développements les plus originaux, alors je suis parti là-dessus

Plan choisi

I - Utilisations de la topologie des EVN de dimension finie.

1. Normes équivalentes, compacité et conséquences.
2. Applications linéaires et normes matricielles

II - Calcul différentiel et intégral en dimension finie

1. Différentielle, jacobienne, gradient, hessienne.
2. Théorème d'inversion locale et sous-variétés.
3. Équations différentielles linéaires.

III - Analyse numérique

1. Méthodes itératives de résolution de systèmes linéaires.
2. Approximation d'opérateurs différentiels

Contrairement au premier oral blanc, j'ai décidé de commencer par revoir mes développements. Problème j'y ai passé plus de 40 minutes et j'ai dû rusher à la fin pour pouvoir mettre les développements... J'ai donc fini avec un plan qui ne faisait que 2 pages et demie et qui était, malgré 45 items, assez incomplet (cette leçon est très vaste et il y a plein de choses à mettre !) Voici le plan idéal que j'aurais aimé présenter :

I - Utilisations de la topologie des EVN de dimension finie.

1. Normes équivalentes, compacité et conséquences.
2. Applications linéaires et normes matricielles

II - Calcul différentiel et intégral en dimension finie

1. Différentielle, jacobienne, gradient, hessienne.
2. Théorème d'inversion locale et sous-variétés.
3. Problèmes d'optimisation en dimension finie.
4. Équations différentielles linéaires.

III - Analyse numérique et matricielle

1. Méthodes itératives de résolution de systèmes linéaires.

2. Analyse des matrices positives et applications.
3. Résolution numérique de problèmes aux dérivées partielles.

La partie optimisation a sauté et j'en suis très triste car c'était **la** partie d'applications des résultats du II, notamment les extrema liés et l'utilisation du caractère défini-positif de la Hessienne pour dire qu'un point critique est un minimum local. Ne pas parler de tout ça a été pénalisé par le jury. La partie analyse des matrices positives était celle où je pouvais parler du théorème de Perron-Frobenius et ses applications aux chaînes de Markov, mais également des matrices monotones, qui servent dans la partie résolution numérique des EDP. Là encore, j'en suis très triste. J'ai pensé après coup mais dans la partie II-1. j'aurais peut-être dû également rajouter les formules de Taylor et la méthode de Newton en dimension finie, qui se met très bien dans cette leçon ! Si j'avais eu le temps, j'aurais peut-être pu évoquer rapidement la méthode des éléments finis, qui se base sur un des aspects présentés dans le rapport du jury : l'approximation, dans les espaces de Hilbert, par des sous-espaces de dimension finie.

Défense du plan

En partant de ce plan, j'ai fait un schéma au tableau en prenant mes 3 parties, avec la topologie en haut qui irrigue les deux autres de ses propriétés sympathiques en dimension finie. J'ai fait des flèches pour relier la topologie à l'analyse numérique grâce aux normes matricielles et au rayon spectral, une flèche également pour le calcul différentiel via les représentations matricielles des différentielles/différentielles secondes pour une fonction réelles (calcul facilité, utilisation dans la formule de changement de variables etc.) mais également, grâce à la complétude, le TIL et le TFI, qui permettent de définir les sous-variétés de \mathbb{R}^n , et également l'existence et l'unicité des solutions d'équations différentielles. Bolley a apprécié que je fasse ça ! Par contre Baptiste Huguet a regretté que je parle du temps qu'il me reste pour la présentation orale (j'ai stressé, c'était même pas naturel).

Développements choisis

1. Critères de contrôlabilité des systèmes différentiels en dimension finie,
2. **Analyse d'un schéma aux différences finies semi-implicite pour la résolution d'une EDP de réaction-diffusion.**

Le développement option B qui carry. Malheureusement, à la fin des 15 minutes, je n'ai pas pu prouver les propriétés qualitatives du schéma. Bolley m'a demandé de le prouver et ça allait au final.

Questions posées

1. Pourquoi (dans mon développement) la fonction g doit être de classe \mathcal{C}^2 ? J'ai répondu que pour montrer l'existence et l'unicité de la solution de mon EDP de réaction-diffusion, il fallait effectuer un argument de point fixe sur la formule de Duhamel associée à l'équation de la chaleur. Le fait que g soit de classe \mathcal{C}^2 permettrait (j'en suis toujours pas sûr mais je crois) de montrer que la solution u reste bien de classe \mathcal{C}^2 . Bolley m'a ensuite demandé d'expliciter cette formule de Duhamel ainsi que le noyau de la chaleur. J'ai écrit, ça avait l'air ok.
2. Baptiste Huguet me demande (toujours sur mon développement) où j'ai utilisé mes hypothèses sur g . Je lui réponds qu'elles sont nécessaires pour prouver l'existence et l'unicité d'une solution régulière à l'équation, mais que dans les faits, les propriétés sur g n'interviennent que dans l'étude des propriétés qualitatives du schéma.
3. Toujours sur mon développement, Bolley enchaîne en disant que c'est surprenant de pouvoir prouver facilement que les solutions du schéma sont bien entre 0 et 1. Il me demande alors si on peut en déduire alors grâce à ça que la solution exacte reste aussi entre 0 et 1. Je réponds que ce n'est pas sûr car la convergence du schéma ne correspond pas à une convergence dans un espace normé. Cependant, en y repensant après coup, peut-être qu'en fait ça marche. En tous cas il me demande comment, dans les faits, on prouve que les solutions exactes de l'EDP sont entre 0 et 1. Je réponds que, pour les équations paraboliques, on a des principes de comparaison des solutions, il embraye en parlant de principes du maximum (c'est à peu près pareil, mais pas trop mais bon), j'acquiesce et on passe à autre chose.
4. Quelques questions sur le plan : en item 10, je dis que pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$, il existe un polynôme $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que :

$$\|f - P_n\|_\infty = \inf_{P \in \mathbb{R}_n[X]} \|f - P\|_\infty.$$

On me demande alors de détailler. Je dis que l'application qu'on veut minimiser part d'un EVN de dimension finie, est continue et coercive, donc a un minimiseur (c'est ma proposition 9). On me demande s'il est unique et si on peut caractériser le(s) minimiseur(s). J'ai répondu que oui ce polynôme était unique et qu'il était caractérisé par le fait que P_n (c'est ce que j'ai dit à l'oral, mais c'est faux, c'est $f - P_n$) équi oscille sur $[0, 1]$, c'est-à-dire qu'il existe $n + 2$ points dans $[0, 1]$ $x_0 < \dots < x_{n+1}$ tels que :

$$f(x_i) - P_n(x_i) = \pm(-1)^i \|f - P_n\|_\infty.$$

J'ai donné l'exemple des polynômes de Tchebychev : ils équi oscillent sur $[-1, 1]$. Puis Baptiste Huguet m'a demandé à quoi ça servait d'approcher une fonction f par un polynôme en norme infini. J'ai bafouillé, j'ai répondu à côté en ayant en tête ma méthode d'accélération de la convergence des méthodes itératives, mais au final je n'avais pas de réponses satisfaisantes, il

est passé à autre chose. Cela sert en intégration numérique !! J'aurais dû y penser. Maintenant j'y penserai.

5. En parlant de fonctions à minimiser, Bolley me demande dans quels cas on est assuré d'avoir existence et/ou unicité d'un minimiseur. Je parle donc des fonctions convexes. Les fonctions convexes permettent de dire qu'un minimum local est un minimum global, que si la fonction est de plus strictement convexe, alors si un minimum existe, il est unique, et que si de plus la fonction est coercive, alors il y a existence et unicité du minimiseur. Bolley me demande alors si on peut relaxer l'hypothèse de continuité. Je réponds que dans les EVN de dimension infinie, on ne retient souvent que la condition de semi-continuité inférieure, mais que, en dimension finie, la convexité impliquait la continuité. Baptiste me coupe : "Continuité ? Vous êtes surs ?" je réponds que si la fonction est définie sur un ouvert, alors oui cela implique bien la continuité, mais que sinon, cela implique la continuité sur l'intérieur de l'ensemble de définition, et pas forcément partout. Je sors le contre-exemple du "sourire".
6. J'ai parlé dans ma présentation orale du théorème des extrema liés, que je n'avais pas mis dans mon plan. Baptiste Huguet me demande si j'ai des applications. Évidemment : le théorème spectral ! Baptiste me demande de détailler, je détaille. On a donc que le maximum (resp. le minimum) de la fonction $\langle u(x), x \rangle$ sur la sphère unité pour la norme euclidienne correspond à la plus grande (resp. la plus petite) valeur propre de u . Qu'en est-il des autres valeurs propres de u ? J'ai dit que pour les trouver, il fallait maximiser (ou minimiser) la fonction sur des sous-espaces de dimension plus petite (formules de Courant-Fischer). Baptiste me demande ce que c'est, en terme de "points remarquables" de la fonction. Je bafouille un peu, je dis au final que ce sont des points-selles. Baptiste me demande comment c'est défini. Oulaaa je sais pas trop trop, en fait ce sont les points (x, λ) tels que :

$$\nabla_x (f - \lambda g) = 0$$

où $f : x \mapsto \langle u(x), x \rangle$ et $g : x \mapsto \|x\|^2$. On est passé à la suite.

7. Une dernière question de Baptiste concernant les fonctions implicites : est-ce que j'ai une application ? Je lui dis que ça apparaît très nettement dans la preuve des caractérisations des sous-variétés. Il me demande autre chose. Je lui sors alors l'exemple du PGCD : cela permet d'avoir des développements asymptotiques quand $\varepsilon \rightarrow 0$ des racines d'un polynôme :

$$\varepsilon x^3 + (x - a)(x - b).$$

Il a l'air content. J'aurais dû parler également de la régularité des points fixes à paramètres, qui sert pour la régularité du flot des équations différentielles (et même pour les EDO à paramètres !). On a terminé l'oral là-dessus.

Retours du jury

Gros problème : pas assez d'applications (c'était une impression générale pour notre session d'oraux)! Les extrema liés manquent à la leçon, tout comme la convexité ou l'optimisation en général. Effectivement, à cause du manque de temps j'ai mis tout ça à la trappe. Idem, le fait que je ne puisse pas donner d'applications à l'approximation d'une fonction continue par des polynômes en norme infini a aussi été sanctionné. Sinon, à cause du stress, la fin de mon plan n'est pas trop lisible (ma main tremblait mdr et effectivement c'est très mal écrit). Sinon le jury avait l'air satisfait, Bolley a noté que j'avais des développements originaux. Bolley m'a dit d'ailleurs qu'il ne fallait pas hésiter à utiliser toute la place disponible sur le tableau pour le développement (j'ai utilisé à peu près les deux tiers du tableau de la salle). Je comprends, mais dans les faits, je pense qu'à Kléber, les tableaux seront plus petits (peut-être même bien plus petits) que ceux de l'ENS.