RETOUR ORAL BLANC 3

HOSTEIN Matthias
3A Maths
ENS Rennes
Année 2023 - 2024

27/05/2024

Couplage

1. **253 : Utilisation de la notion de convexité en analyse**,
2. 266 : Utilisation de la notion d'indépendance en probabilités.

Un couplage périlleux entre une leçon difficile mais où je suis plutôt solide (la 253) et une leçon sur laquelle j'ai peur de manquer de contenu (la 266). J'ai opté pour la 253, où il me fallait en plus me faire les dents sur mes développements originaux et casse-gueules.

Plan choisi

I - Ensembles et fonctions convexes [Rombaldi *Analyse matricielle*, Gourdon, Objectif Agrégation, PGCD]
  1. Ensembles convexes, enveloppe convexe.
  2. Fonctions convexes : propriétés et caractérisations.

II - Inégalités de convexité et applications [Gourdon, Briane-Pagès, Bernis-Bernis]
  1. Quelques exemples classiques.
  2. Utilisation en intégration et en probabilités.

III - Optimisation et convexité [Hirsch-Lacombe, Testard *Analyse mathématique*, PGCD, Brézis].
  1. Projection sur un convexe fermé.
  2. Optimisation de fonctions en dimension finie.
  3. Le cas de la dimension infinie.

Je suis content du plan, la partie dimension infinie contient mon deuxième développement et est la partie la plus difficile. J'essaie d'être solide sur les applications et de ne pas mettre des énoncés dont je n'ai aucune idée de la démonstration, mais je suis un peu léger sur les applications. À la fin des 3 heures, j'ai un plan riche dont je suis fier, mais je n'ai pas revu mes développements. Tant pis, ça fera l'affaire.

Défense du plan

J'ai essayé de faire une présentation comme d'hab. Je parle à l'oral de l'aspect géométrique de la convexité qui permet d'avoir une bonne représentation visuelle des objets et je mets les deux applications principales de la convexité : l'intégration et les probas (Hölder, Minkowski, Jensen et approximations de l'unité, inégalité de Höffding) et l'optimisation, dans laquelle les ensembles et les fonctions convexes jouent un rôle central : un minimum local d'une fonction convexe est un minimum global, une petite méthode de gradient à pas fixe qui va bien, et puis également, les ensembles convexes peuvent remplacer les ensembles compacts, pour peu qu'on se place dans des topologies plus faibles, pour laquelle des ensembles bornés sont relativement compacts. Cette partie optimisation occupe presque la moitié de mon plan ! Problème : je commence à sécher un peu au bout de 2 minutes et j'essaie de me raccrocher en citant et en écrivant les résultats importants, sauf que ça ne permettait pas de mettre en valeur la cohérence de mon plan... Il faudrait que j'essaie de garder un œil sur mon plan le long de ma présentation pour que je puisse distiller efficacement la logique de mon plan tout en prenant du recul à l'oral. D'ailleurs, encore une fois, j'oublie presque de parler de mes deux développements... cela aurait pu m'aider à mieux les motiver dans la leçon d'ailleurs...

Développements choisis

1. **La courbe brachistochrone**,
2. Théorème de Fenchel-Rockafellar.

Il est là, enfin je vais me faire une idée de comment un jury réagirait à la présentation de ce développement casse-gueule. J'ai essayé de mettre un peu toutes les étapes en détaillant surtout les étapes clefs et qui sont en lien avec la leçon (obtention du problème de minimisation, obtention de l'équation d'Euler-Lagrange et justification du fait que la solution à cette équation est bien un minimiseur en utilisant la convexité). Le problème étant qu'au final, j'ai mis à peu près 8 minutes avant d'arriver à la partie qui utilise la convexité. Je pense qu'il faudra que je revois la présentation du développement pour mieux le motiver dans la leçon : après avoir obtenu l'équation d'Euler-Lagrange, montrer directement que si f est solution de cette équation et si la fonction L est strictement convexe, alors on a gagné, puis se ramener au problème de minimisation équivalent où tout est strictement convexe, sans justifier tout de suite que la solution de cette équation est bien une fonction dont le graphe est une courbe de cycloïde.

Questions posées

I - Développement

1. Pourquoi, dans le problème de minimisation équivalent que je considère, ma fonction $g = \sqrt{2f}$ est régulière ? Je réponds qu'on n'a besoin que du fait qu'elle soit de classe $\mathscr{C}^2$ sur l'intervalle ouvert $(0, x_B)$ et c'est bien le cas car f ne s'annule qu'en 0. On a alors que g vérifie bien des hypothèses analogues au f de départ.
2. Pourquoi, quand je prends une fonction k $\mathscr{C}_c^\infty$, la fonction $u : \varepsilon \mapsto J(f+\varepsilon k)$ est dérivable en $\varepsilon = 0$? En effectuant un développement de Taylor à l'ordre 2 de l'intégrande qui apparaît dans J, on obtient un terme d'ordre 1 que je montre comme étant ma dérivée en 0, et un terme d'ordre 2 de la forme :

$$\varepsilon^2 \begin{pmatrix} k(x) & k'(x) \end{pmatrix} \mathrm{Hess}(L)(f(x), f'(x)) \begin{pmatrix} k(x) \\ k'(x) \end{pmatrix}.$$

Le terme, sans ε^2, une fois intégré, est borné indépendamment de ε étant donné que k est à support compact. Ainsi, il s'agit d'un $o(\varepsilon)$. La fonction u est donc bien dérivable en 0.

3. Autre question de Baptiste Huguet : pourquoi c'est important de supposer $\partial_2 L$ bornée pour conclure à la fin ? Je lui réponds que cela sert pour pouvoir effectuer une intégration par parties qui ferait potentiellement apparaître un terme de bord si on ne supposait plus cette quantité bornée.

II - Plan

1. Question de Debussche : c'est facile à montrer Hölder ? Je réponds qu'on le prouve pour f et g de norme 1 par l'inégalité de Young et qu'on se ramène à ce cas en divisant f et g par leur norme. Il me demande alors si c'est vrai pour une mesure autre que de proba. J'avoue ne pas comprendre, je lui dis que c'est vrai en toute généralité et il me dit que je m'étais placé dans un espace de proba dans mon plan. Je relis et non je n'ai fait aucune supposion sur la mesure. En fait je l'ai mise dans ma partie "Utilisation en intégration et en probabilités" et il a cru que j'avais marqué simplement "utilisation en probabilités". Bon le malentendu est passé, je le pardonne, il avait l'air malade. Il m'enchaîne donc sur Jensen. Cette fois c'est clairement faux en mesure différente de 1, mais je n'ai pas vraiment de contre-exemples. Baptiste Huguet me demande comment on montre Jensen. Je lui dis qu'on utilise le fait qu'une fonction convexe est au-dessus de ses tangentes. J'écris une inégalité avec f'. Il m'arrête en me disant "f est dérivable ?" je me reprends en remplaçant f' par f'_d et f'_g, les dérivées à droite et à gauche de f, qui existent toujours. Il me demande pourquoi, je réponds que c'est la croissance des pentes qui nous donne l'existence de ces limites.
2. Questions de Léo Bigorgne sur les fonctions convexes : quelles opérations laissent stables la convexité ? Somme ? Composition ? Je réponds que la somme de deux fonctions convexes est convexe et que la composition d'une fonction croissante et d'une fonction convexe est convexe. Par contre, si f et g sont convexes, $f \circ g$ n'est pas nécessairement convexe. Par exemple, $f(x) = -x$ et $g(x) = x^2$.
3. Baptiste me parle alors de mon application du théorème de Carathéodory : si E est de dimension finie et $K \subset E$ compact, alors $\mathrm{Conv}(K)$ est compact. Il me demande si ça marche en dimension infinie ? Je lui dis que non, le théorème de Carathéodory n'est valable qu'en dimension finie. Il me demande alors si le passage à l'enveloppe convexe laisse stable quelques propriétés tout de même. Je réponds que l'enveloppe convexe reste fermée et bornée, mais qu'en dimension infinie, cela ne suffit pas à garantir la compacité. Il allait me demander comment je montrais que l'enveloppe convexe restait fermée mais il s'est ravisé sans que je ne sache vraiment pourquoi.
4. Léo Bigorgne me pose une question sur mon deuxième développement : à quoi il sert ? Je balance mon speech sur le transport optimal et sur le résultat de dualité de Kanto-

rovitch. Je dis que c'est dur et que ça utilise Prokhorov en plus de Fenchel-Rockafellar. Il n'insiste pas plus.

5. Question de Baptiste Huguet sur Krein-Milman : c'est vrai en dimension infinie ? Je réponds que c'est vrai si on remplace "enveloppe convexe" par "enveloppe convexe fermée". Je dis que ça utilise les théorèmes de Hahn-Banach. Il passe à autre chose.
6. Debussche back in the game : où est-ce qu'on minimise des fonctions en dimension finie ? J'aurais pu citer le cas du transport optimal, mais je me suis rabattu sur les espaces de Hilbert. Il était moyen content parce que les théorèmes dans les Hilbert sont plus simples que ceux que j'ai cités dans mon plan. Mais bon je balance quand-même le ptit problème de Dirichlet $-u'' + |u|^{p-1}u = 0$. Il enchaîne sur "À quoi ça sert Hahn-Banach géométrique ?" je lui réponds que ça permet de montrer que les convexes fermés forts sont fermés faibles. Il me demande une "vraie application". Et là au lieu de répondre "mon deuxième développement" je réponds "je sais pas". Ayaya Matthias.
7. Question de Baptiste sur la minimisation de fonctions convexes en dimension infinie : est-ce qu'on peut affaiblir les hypothèses de continuité sur la fonction à minimiser ? Je dis qu'il suffit qu'elle soit semi-continue inférieurement. "Et si on est en dimension finie ?" Je réponds alors que l'hypothèse de continuité est superflue, puisque les fonctions convexes sont automatiquement continues lorsqu'elles sont définies sur un ouvert. En dimension infinie, cette hypothèse n'est clairement pas superflue : les fonctions linéaires en dimension infinie restent convexes mais ne sont pas toujours continues.
8. Dernière question sur le plan, parlant de méthodes de gradient. J'ai mis mon ptit gradient à pas fixe. On me demande quelle est la vitesse de convergence : je dis que c'est une convergence géométrique dont le taux est une fonction du pas de descente. Il me demande si on peut faire mieux. Je lui dis que si on sait pas à quoi ressemble la fonction à minimiser, c'est une bonne méthode qui coûte pas cher. Mais si on a une fonctionnelle quadratique, on peut utiliser une méthode de gradient à pas optimal (je l'avais pas mis dans le plan et franchement j'aurais dû). Baptiste me demande comment on montre ce théorème. Je lui réponds que c'est basé sur une inégalité de convexité qu'est l'inégalité de Kantorovitch. Je l'écris au tableau et ils ont l'air content. On passe aux exos

III - Exercices

1. Exo de Léo Bigorgne : si $f : [a, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ est convexe, montrer que la limite $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ existe. Je bloque un peu, j'écris l'inégalité des pentes et puis il me dit de prendre $a = 0$ tant qu'à faire et de comparer avec la fonction pente en 0 (notée p_0). Là c'est bon, il suffit juste de dire :
$$\frac{f(x)}{x} = p_0(x) + \frac{f(0)}{x}$$
et les deux termes de la somme ont une limite quand x tend vers l'infini. Si a est non-nul, on peut juste translater.

2. Un petit exo de Debussche : on considère l'équation différentielle :

$$x' = -x - \nabla f(x)$$

avec $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ convexe. Montrer que si x et y sont deux solutions, alors $\|x - y\|$ décroît. Pas dur, il suffit de dériver $\|x - y\|^2$ et on se rend compte que c'est négatif grâce à la convexité de f. On peut même dire mieux avec un Grönwall différentiel : on a obtenu :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|x(t) - y(t)\|^2 \leqslant -2\|x(t) - y(t)\|^2$$

de sorte que :

$$\|x(t) - y(t)\|^2 \leqslant e^{-2t}\|x_0 - y_0\|^2.$$

Ils étaient à cours de question et ils m'ont lâché 7 minutes avant la fin.

Retours du jury

Globalement ils étaient contents : le plan était solide et il y avait tout ce qu'ils attendaient. Ça aurait mérité un gradient à pas optimal cela dit. Par contre ils ont trouvé ma présentation de plan un peu bof : ils ont bien aimé ma présentation au tableau qui était très agréable et ils ont bien aimé mon plan mais les deux ne collaient pas trop ensemble : Debussche trouvait que je surjouais le côté "présentation générale" comme dans la vidéo qu'on trouve sur le site de l'agreg. Bon je comprends. Ensuite, il m'a dit qu'il était moyen convaincu par mon développement : "Tu fais des trucs mais sans vraiment détailler, c'est propre sans être nickel" (phrase d'anthologie assurément) et surtout il me dit qu'on pourrait mieux justifier sa présence dans la leçon. C'est vrai, j'aurais dû insister plus sur le fait que, d'un problème d'optimisation en dimension infinie dans un cadre fonctionnel plutôt moche, on se ramène à des problèmes d'optimisation sur $\mathbb{R}$ et à de la convexité en dimension 2 puisque seule la convexité de la fonction L entre en jeu pour justifier le minimum. Au niveau du plan, ils m'ont dit que c'était sans doute d'un niveau trop haut et que c'était trop risqué. Ils m'ont dit aussi que ça manquait d'applications pour les gros théorèmes. "Je m'en fous de Krein-Milman, je veux une application !" me dit Debussche. Et au final, j'ai pensé après coup au théorème de Birkhoff, disant que l'ensemble des matrices bistochastiques étaient l'enveloppe convexe des matrices de permutation (résultat qui est dans le Rombaldi analyse matricielle en plus !) qui aurait fait une merveille d'application pour Krein-Milman. En définitive, j'ai eu la même note que pour la leçon dimension finie en analyse alors que je pensais avoir largement mieux réussi la leçon d'aujourd'hui. Comme quoi la vie est pleine de surprises.