RETOUR ORAL MODÉLISATION OPTION B

HOSTEIN Matthias
3A Maths
ENS Rennes
Année 2023 - 2024

04/07/2024

Couplage

1. **B76 : Différences finies, optimisation, algèbre linéaire**,
2. B91 : Analyse qualitative d'équations différentielles, algèbre linéaire, je sais plus les autres mots-clefs.

Les deux textes avaient l'air sympa, mais j'ai choisi de prendre le premier, qui m'avait l'air plus simple (ou en tous cas, qui abordaient des choses que je connaissais mieux). Et puis, j'aime bien les différences finies et l'optimisation.

Résumé du texte

0.1 Introduction

On attache un élastique unidimensionnel à ses deux extrémités, et on introduit un repère orthonormé de sorte à ce que l'élastique soit attaché aux points $(0,0)$ et $(1,0)$ de ce repère. On fait ensuite tendre cet élastique au-dessus d'un obstacle. L'élastique est représenté par le graphe d'une fonction u définie sur $[0,1]$, et l'obstacle est représenté par le graphe d'une fonction v. Le but est donc de connaître la fonction u pour pouvoir connaître la forme que va prendre l'élastique. On fait alors l'hypothèse que la déformation subie par l'élastique est faible, de sorte que l'énergie de déformation stockée par l'élastique dans une section élémentaire entre x et $x + \mathrm{d}x$ puisse être donnée par la loi de Hooke :

$$E_{\mathrm{el}} = \frac{1}{2}k\,(e - \ell)^2$$

où e est l'étirement local de l'élastique et ℓ la longueur au repos de l'élastique. On a alors :

$$E_{\mathrm{el}} = \frac{1}{2}k\mathrm{d}x\left(\sqrt{1 + u'(x)^2} - \ell\right)^2.$$

L'énergie stockée dans l'élastique devant être minimale, on a alors que la fonction u vérifie le problème d'optimisation suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_0^1 \left(\frac{1}{2}k\left(\sqrt{1+u'(x)^2} - \ell\right)^2\right)\mathrm{d}x & = & \displaystyle\min_w \int_0^1 \left(\frac{1}{2}k\left(\sqrt{1+w'(x)^2} - \ell\right)^2\right)\mathrm{d}x \\ & u(0) = u(1) = 0 \quad \text{et} \quad u \geqslant v. & \end{array}\right.$$

En supposant que u' est petit devant les différences de longueur en jeu, on a alors, en première approximation, que u vérifie le problème d'optimisation suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \displaystyle\frac{1}{2}\int_0^1 u'(x)^2\mathrm{d}x & = & \displaystyle\min_w \frac{1}{2}\int_0^1 w'(x)^2\mathrm{d}x \\ u(0) = u(1) = 0 & \text{et} & u \geqslant v. \end{array}\right.$$

On a alors que ce problème admet une unique solution (le sujet ne précisait pas l'espace fonctionnel adapté pour u ! J'ai pu donc parler de $H_0^1(0,1)$ sans que ce ne soit explicitement indiqué dans le texte).

0.2 Discrétisation du problème

La solution u n'étant pas explicite en général, on essaie d'approcher la solution u en discrétisant le problème. On fixe alors une subdivision régulière $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_N < x_{N+1} = 1$ de l'intervalle $[0,1]$ et on essaie de résoudre le problème discrétisé suivant :

$$\text{Trouver} \quad U^* \in \mathbb{R}^N \quad \text{tel que} \quad J_N\left(U^*\right) = \min_{\substack{U \in \mathbb{R}^N \\ U \geqslant V}} J_N(U)$$

où $V \in \mathbb{R}^N$ est le vecteur $(v(x_i))_{i \in [\![1,N]\!]}$ et où J_N est la fonctionnelle suivante, définie sur $\mathbb{R}^N$:

$$\begin{array}{rccl} J_N & : & \mathbb{R}^N & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & U & \longmapsto & \dfrac{1}{2}\langle AU | U \rangle \end{array}$$

où $A \in \mathscr{M}_N(\mathbb{R})$ désigne la matrice du laplacien. On montre alors qu'il existe une unique solution à ce problème d'optimisation, qui vérifie quelques propriétés, en accord avec l'intuition :

$$\forall i \in [\![1,N]\!], \quad U_i^* \geqslant \frac{U_{i+1}^* + U_{i-1}^*}{2}$$

avec égalité si $U_i^* > V_i$.

0.3 Méthodes de résolution approchée du problème d'optimisation discrétisé

On propose deux méthodes de résolution approchée de ce problème d'optimisation. La première est une méthode de gradient à pas constant avec projection : on note :

$$K_N := \left\{ U \in \mathbb{R}^N \ \mid U \geqslant V \right\}$$

et on considère :

$$\begin{array}{rcccl} \pi & : & \mathbb{R}^N & \longrightarrow & K_N \\ & & U & \longmapsto & \max(U,V) := (\max(U_i, V_i))_{1 \leqslant i \leqslant N} \end{array}$$

la projection sur le convexe fermé K_N. On considère alors la suite suivante, définie par récurrence :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} U^0 & \in & K_N \\ U^{k+1} & = & \pi\left(U^k - \rho A U^k\right) \end{array} \right.$$

où $\rho > 0$ est fixé. On montre alors que si $\rho < \dfrac{2}{\lambda_{\max}}$, où $\lambda_{\max}$ désigne la plus grande valeur propre de la matrice du laplacien A, alors la suite (U^k) converge vers U^*. La deuxième méthode est une méthode de pénalisation. Il convient donc de réexpliquer le principe de cette méthode : on fixe un petit paramètre $\eta > 0$ destiné à tendre vers 0 et, au lieu de résoudre le problème d'optimisation discret avec contrainte, on résout le problème d'optimisation sans contrainte suivant :

$$\text{Trouver} \quad U^{*,\eta} \in \mathbb{R}^N \quad \text{tel que} \quad J_{N,\eta}\left(U^{*,\eta}\right) = \min_{U \in \mathbb{R}^N} J_{N,\eta}(U)$$

où $J_{N,\eta}$ est la fonctionnelle suivante, définie sur $\mathbb{R}^N$:

$$\begin{array}{rccl} J_{N,\eta} & : & \mathbb{R}^N & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & U & \longmapsto & \dfrac{1}{2}\langle AU|U\rangle + \dfrac{1}{\eta}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \max(V_i - U_i, 0)^2. \end{array}$$

On montre que ce problème admet une unique solution pour tout $\eta > 0$ et que $U^{*,\eta} \xrightarrow[\eta \to 0^+]{} U^*$. On approche alors $U^{*,\eta}$, pour η petit, par une méthode de gradient à pas constant :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} U^0 & \in & \mathbb{R}^N \\ U^{k+1} & = & U^k - \rho\left(AU^k - \dfrac{2}{\eta}\max(V - U^k, 0)\right) \end{array} \right.$$

On montre alors que, sous réserve que $\rho < \dfrac{2\eta}{2 + \eta\lambda_{\max}}$ (je crois), la suite (U^k) converge vers $U^{*,\eta}$.

Plan choisi

Titre : Comment anticiper la déformation d'une structure élastique soumise à un obstacle

I - Présentation du problème

1. Le modèle élastique
2. Linéarisation du problème
3. Discrétisation et propriétés de la solution discrète

II - Présentation des méthodes de résolution approchées (*)

1. La méthode avec projection
2. La méthode avec pénalisation

III - Comparaison de la convergence des méthodes (*)

1. Convergence de la méthode avec projection
2. Convergence de la méthode avec pénalisation

Je suis content car j'ai pu traiter tout le texte pendant ma préparation, et donc j'ai pu organiser mon plan de sorte à montrer les résultats pertinents, notamment la stricte convexité des fonctions, qui permettent de justifier l'existence et l'unicité des solutions aux problèmes d'optimisation, et la convergence des méthodes de gradient. Mes simulations marchaient bien également ! J'ai pu également tracer des courbes de convergence pour comparer les méthodes, j'avais donc du contenu dont j'étais fier.

Questions posées

Je remets quelques questions dont je me souviens (elles ne sont pas dans l'ordre et je ne me souviens plus des autres) :

1. Réexpliquer pourquoi on a les propriétés qualitatives :

$$\forall i \in [\![1, N]\!], \quad U_i^* \geqslant \frac{U_{i+1}^* + U_{i-1}^*}{2}$$

avec égalité si $U_i^* > V_i$. Cela vient du fait suivant :

$$\forall i \in [\![1, N]\!],\ \forall \varepsilon > 0, \quad J_N \left(U^* + \varepsilon e_i\right) \geqslant J \left(U^*\right).$$

La première quantité est bien définie car $U^* + \varepsilon e_i$ est bien dans le convexe K_N (on augmente de ε la i-ème composante, déjà supposée plus grande que V_i). On peut donc dériver selon le vecteur e_i dans la bonne direction (selon $+e_i$, mais pas forcément selon $-e_i$) et donc on obtient :

$$\frac{\partial J_N}{\partial U_i} \left(U^*\right) \geqslant 0$$

ce qui donne exactement la bonne relation. Si maintenant $U_i^* > V_i$, alors cette fois, on peut également dériver selon $-e_i$ car pour un certain $\varepsilon > 0$ assez petit, $U^* - \varepsilon e_i$ va rester dans K_N (car $U_i^* - \varepsilon > V_i$). Ainsi, dans ce cas, on obtient :

$$\frac{\partial J_N}{\partial U_i} \left(U^*\right) = 0$$

2. Réexpliquer pourquoi la fonctionnelle J_N est strictement convexe et coercive. J'ai dit que sa hessienne est définie positive. Pour la coercivité, on peut utiliser le fait que :

$$\langle AU | U \rangle \geqslant \lambda_{\min} \|U\|^2$$

grâce au théorème spectral.

3. Un monsieur du jury m'a posé une question sur le principe de Courant-Fischer. Du coup j'ai sorti le truc en dimension finie (le min-max), mais il voulait me l'appliquer en dimension infinie pour le laplacien. Je finis par dire que du coup la plus grande valeur propre de

l'opérateur $-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}$ correspond à :

$$\max_{\substack{u\in H_0^1\\ \|u\|=1}} \int_0^1 u'(x)^2 \mathrm{d}x.$$

Le monsieur me demande justement de me donner les valeurs propres de ce Laplacien : il s'agit des $(n\pi)^2$ pour $n \in \mathbb{N}$ et donc ce spectre n'est pas borné (J'ai l'impression que du coup le théorème de Courant-Fischer ne marche pas ici puisque le laplacien n'est pas compact) ! Comment expliquer alors que le spectre de la matrice du laplacien discrétisé A soit dans l'intervalle $(0, 4)$? Je réponds que, lorsqu'on veut résoudre numériquement l'équation de Laplace, la matrice qui apparaît est $(N+1)^2 \times A$: quand N tend vers $+\infty$, le spectre grossit de plus en plus, ce qui est cohérent.

4. Y a-t-il un avantage à utiliser une méthode de pénalisation par rapport à une méthode de gradient projeté ? Je réponds qu'en toute généralité, il est difficile d'avoir une expression explicite du projeté sur le convexe définissant les contraintes. Une méthode de pénalisation peut donc permettre de contourner ce problème.

5. Pour rester sur la méthode de pénalisation, un monsieur du jury me demande pourquoi on élève au carré les termes $\max(V_i - U_i, 0)$ qui apparaissent dans la fonctionnelle. Je réponds que c'est pour rendre l'application $\mathscr{C}^1$. Le monsieur me demande alors si la fonctionnelle est de classe $\mathscr{C}^2$. Je réponds que non, la fonction $x \mapsto \max(x,0)^2$ n'est pas deux fois dérivable en 0 donc il n'y a aucune chance que ce soit $\mathscr{C}^2$.

6. Est-ce qu'on pourrait donner une méthode de pénalisation pour le problème continu ? Je dis qu'on pourrait sûrement et je dis que ce serait minimiser sans contrainte la fonctionnelle :

$$\begin{array}{rccl} J_\eta & : & H_0^1(0,1) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & u & \longmapsto & \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 u'(x)^2\mathrm{d}x + \frac{1}{\eta}\int_0^1 \max(v(x)-u(x),0)^2\mathrm{d}x. \end{array}$$

Grâce au fait qu'on se place sur H_0^1, toutes les intégrales convergent. On pourrait montrer alors que l'unique solution u^η de ce problème d'optimisation sans contrainte converge, dans H^1 vers la solution u du problème de départ. Le jury ne m'a pas demandé de le faire.

7. La matrice du laplacien a un spectre bien connu. Comment on pourrait approcher la valeur propre maximale ou le rayon spectral d'une matrice moins sympa ? Je réponds que, pour le rayon spectral, on a la formule :

$$\rho(A) = \lim_{k\to+\infty} \left|\!\left|\!\left| A^k \right|\!\right|\!\right|^{\frac{1}{k}}.$$

Sinon, je dis qu'on peut utiliser une méthode de la puissance, mais elle ne marche que s'il n'y a qu'une seule valeur propre de module maximal (je donne comme contre-exemple la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ où la méthode de la puissance n'a aucune chance de converger). Le monsieur me demande quelle méthode me semble plus avantageuse. Je réponds que ça dépend, mais que dans la plupart des cas, la méthode de la puissance marche. Il me dit qu'il y a aussi un autre avantage avec cette méthode. Je dis "ah oui ça renvoie aussi un vecteur propre pour cette valeur propre". Le monsieur a l'air content.

8. Comment on montre que l'application de projection sur un convexe fermé est 1-lipschitzienne (utile pour la preuve de la convergence de la méthode de gradient avec projection) ? Et puis comment on montre que l'application π est bien l'application de projection sur le convexe K_N ? J'ai bien fait de refaire la preuve de la première question sur ma feuille ! Je réponds que dans les deux cas, on utilise la caractérisation des angles obtus. Le monsieur ne me laisse pas le temps de développer et me dit "Vous savez faire non ? C'est classique ?" Je dis "Oui c'est sur ma feuille." Le monsieur a l'air très content.
9. La dernière question portait sur la forme de la solution exacte. Est-ce que j'ai une intuition de ce que ça pourrait être ? Je fais des dessins, en disant que la solution exacte doit être affine lorsqu'elle est strictement au-dessus de l'obstacle. Le monsieur me dit "je suis sûr que vous savez". J'ai l'idée mais j'oublie le terme mathématique. Je lance au final "Ah oui le graphe de u doit être l'enveloppe convexe du graphe de v !" Le monsieur me dit "oui mais pas exactement" je dis du coup "oui du coup ce serait l'intersection des convexes contenant $(0,0)$, $(1,0)$ et le graphe de v". Le monsieur acquiesce et on s'arrête là.

Bilan

J'ai eu l'impression que tout roulait à cet oral. La discussion à la fin était très dynamique, mais ils me laissaient le temps de boire si j'en avais besoin. J'ai failli oublier de montrer mes courbes de convergence à la fin de mes 35 minutes, mais le jury m'a laissé déborder 5 secondes. J'étais content de pouvoir les montrer. J'ai eu au final 19,75. Ça correspond plutôt bien à mon ressenti après l'oral.