Soutenance de stage de L3

Phénomène de propagation pour les équations bistables posées sur les arbres homogènes

Matthias HOSTEIN
Tuteur : Grégory FAYE

ENS Rennes, Institut de Mathématiques de Toulouse

31 Août 2022

Table des matières

1. Définition et portée du problème
2. Résultats pour $k = 1$ et illustrations

1. Définition et portée du problème

2. Résultats pour $k = 1$ et illustrations

Définition générale du problème

Soit $\mathscr{G} = (\mathscr{V}, \mathscr{E})$ un graphe connexe. On s'intéresse à l'EDO suivante :

$$I_v'(t) = d \sum_{v' \sim v} (I_{v'}(t) - I_v(t)) + f(I_v(t)), \quad t \geq 0, \; v \in \mathscr{V}.$$

- $I_v(t)$: certaine quantité au nœud v, au temps t,
- $d > 0$: coefficient de diffusion,
- $v' \sim v$: $[v, v'] \in \mathscr{E}$,
- $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$: fonction *bistable* : reproduction + mort.

Définition générale du problème

Définition

Une application $g_a \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$ indicée par $a \in (0,1)$ est dite bistable si elle respecte les propriétés suivantes ;

1. $g_a(0) = g_a(a) = g_a(1) = 0, \ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0, a, 1\}, \quad g_a(x) \neq 0,$
2. $\exists x_0 \in (0, a), \ \exists x_1 \in (a, 1), \quad g_a'(x_0) = g_a'(x_1) = 0,$
3. $\forall x \in (-\infty, x_0) \cup (x_1, +\infty), \quad g_a'(x) < 0,$
4. $\forall x \in (x_0, x_1), \quad g_a'(x) > 0.$

Ex : L'application $f_a : u \mapsto u(1-u)(u-a)$ est bistable.

Portée du problème

Soit $\mathscr{G} = (\mathscr{V}, \mathscr{E})$ un graphe connexe. On s'intéresse à l'EDO suivante :

$$I_v'(t) = d \sum_{v' \sim v} (I_{v'}(t) - I_v(t)) + f(I_v(t)), \quad t \geq 0, \; v \in \mathscr{V}.$$

Cette équation est dite de ***réaction-diffusion*** et est un modèle utilisé en épidémiologie ou en neuro-sciences.

Dans ces optiques, il est intéressant d'étudier les phénomènes de **propagation** et de **résorption/extinction**.

Réécriture du problème

On prendra $\mathscr{G} = \mathbb{H}_k$, $k \geq 1$: arbre homogène de degré k, i.e. chaque nœud possède $k+1$ voisins.
Pour $k = 1$, l'EDO s'écrit donc :

$$I_j'(t) = d(I_{j-1}(t) - 2I_j(t) + I_{j+1}(t)) + f(I_j(t)), \quad t \geq 0,\ j \in \mathbb{Z}.$$

Pour $k \geq 2$, en regroupant les nœuds par génération et en supposant que la valeur $I_v(0)$ est commune pour chaque nœud d'une génération donnée, l'EDO se réécrit ainsi :

$$\begin{cases} I_1'(t) &= d(k+1)(I_2(t) - I_1(t)) + f(I_1(t)), \\ I_n'(t) &= d(I_{n-1}(t) - (k+1)I_n(t) + kI_{n+1}(t)) + f(I_n(t)), \ n \geq 2. \end{cases}$$

Réécriture du problème

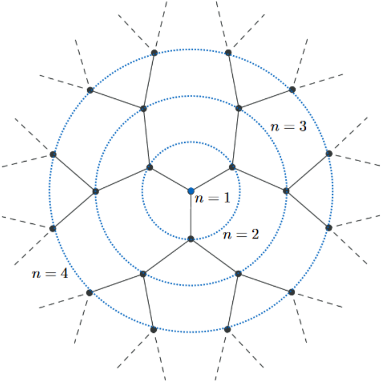


Figure – Représentation de l'arbre homogène $\mathbb{H}_2$. Source : Christophe Besse and Grégory Faye. Spreading properties for SIR models on homogeneous trees. Bulletin of Mathematical Biology, 83(11) :1–27, 2021

Bilan des objectifs

En étudiant les équations

$$I_j'(t) = d(I_{j-1}(t) - 2I_j(t) + I_{j+1}(t)) + f(I_j(t)), \quad t \geq 0,\ j \in \mathbb{Z}.$$

et

$$\begin{cases} I_1'(t) & = & d(k+1)(I_2(t) - I_1(t)) + f(I_1(t)), \\ I_n'(t) & = & d(I_{n-1}(t) - (k+1)I_n(t) + kI_{n+1}(t)) + f(I_n(t)), \ n \geq 2. \end{cases}$$

on cherche à caractériser les situations suivantes :

$$I_j(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} 1 \quad \forall j$$

et

$$I_j(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0 \quad \forall j$$

1 Définition et portée du problème

2 Résultats pour $k = 1$ et illustrations

Un résultat préliminaire important

Théorème (Théorème de comparaison)

Soient $(u_j)_{j\in\mathbb{Z}},\ (v_j)_{j\in\mathbb{Z}} \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^+, \ell^p(\mathbb{Z}))$ *vérifiant :*

$$\forall j \in \mathbb{Z},\ \forall t \geq 0, \quad u_j'(t) \leq d(u_{j-1}(t) - 2u_j(t) + u_{j+1}(t)) + f(u_j(t))$$

et

$$\forall j \in \mathbb{Z},\ \forall t \geq 0, \quad v_j'(t) \geq d(v_{j-1}(t) - 2v_j(t) + v_{j+1}(t)) + f(v_j(t))$$

avec :

$$\forall j \in \mathbb{Z}, \quad u_j(0) \leq v_j(0).$$

Alors :

$$\forall j \in \mathbb{Z},\ \forall t \geq 0, \quad u_j(t) \leq v_j(t)$$

On dit alors que (u_j) est une *sous-solution* de l'EDO et que (v_j) est une *sur-solution*.

Conséquence immédiate

Proposition

Si (I_j) est solution de l'EDO avec :

$$\forall j \in \mathbb{Z}, \quad 0 \leq I_j(0) \leq 1,$$

alors :

$$\forall j \in \mathbb{Z},\ \forall t \geq 0, \quad 0 \leq I_j(t) \leq 1$$

Extinction

Proposition

Soit $\kappa = \sup_{u\in(a,1)} \dfrac{f(u)}{u}$. *Soit* $(I_j^\ell)_{j\in\mathbb{Z}}$ *vérifiant l'EDO avec* $(I_j^\ell(0))_{j\in\mathbb{Z}} = (\mathbb{1}_{[\![-\ell,\ell]\!]}(j))_{j\in\mathbb{Z}}$. *Pour* $d > d_0 := \dfrac{\kappa e^{\frac{3}{2}}}{2\pi a^2}$, *pour tout* $\ell \in [\![0,\ell_0]\!]$ *avec* $\ell_0 = \left\lfloor \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{d}{d_0}} - 1\right)\right\rfloor$, *la solution* $(I_j^\ell)_{j\in\mathbb{Z}}$ *vérifie :*

$$(I_j^\ell(t))_{j\in\mathbb{Z}} \xrightarrow[t\to+\infty]{\|\cdot\|_\infty} (0)_{j\in\mathbb{Z}}.$$

Extinction : Stratégie de la preuve

- Prendre $(v_j) \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^+, \ell^p(\mathbb{Z}))$ vérifiant :

$$\left\{ \begin{array}{rcll} v_j'(t) & = & d(v_{j-1}(t) - 2v_j(t) + v_{j+1}(t)) + \kappa v_j(t), & \forall j \in \mathbb{Z}, \\ v_j(0) & = & \mathbb{1}_{[\![-\ell,\ell]\!]}(j), & \forall j \in \mathbb{Z} \end{array} \right.$$

  et remarquer qu'il s'agit d'une sur-solution.
- Majorer $v_j(t)$ et choisir $t_0 > 0$, d et ℓ_0 tels que $\|v(t_0)\|_\infty < a$.
- Prendre (w_j) solution de l'EDO vérifiant $\|v(t_0)\|_\infty \leq w_j(t_0) = \gamma < a$ et prouver sa convergence uniforme vers la suite nulle et utiliser le théorème de comparaison pour prouver que $I_j^\ell(t) \leq w_j(t)$ pour tous j et tout $t \geq t_0$.

Extinction : Stratégie de la preuve

La majoration de $v_j(t)$ se base sur le lemme suivant :

Lemme (Résolution de l'équation de la chaleur discrète)

On considère l'EDO suivante :

$$x_j'(t) = x_{j-1}(t) - 2x_j(t) + x_{j+1}(t), \quad j \in \mathbb{Z}, \; t \in \mathbb{R}^+.$$

Les solutions de cette équation sont exactement :

$$x_j(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathscr{G}_{j-k}(t) x_k(0), \quad \forall j \in \mathbb{Z}, \; \forall t \in \mathbb{R}^+.$$

avec :

$$\forall t \in \mathbb{R}^{+*}, \; \forall j \in \mathbb{Z}, \quad 0 < \mathscr{G}_j(t) \leq e^{\frac{1}{4}} \frac{e^{\frac{-j^2}{16t}}}{\sqrt{4\pi t}}.$$

Exemple : extinction

- $f = f_a$ (cubique)
- $a = 0,499$,
- $d = 22$,
- $\ell = 5$.

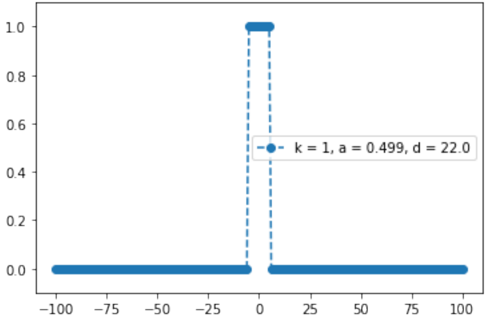
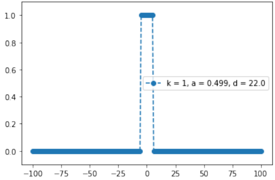
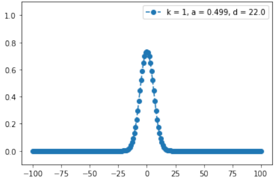


Figure – $(I_j^5(0))_{j\in[\![-100,100]\!]}$

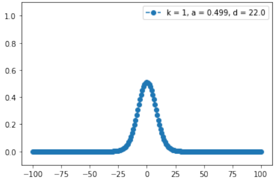
Exemple : extinction



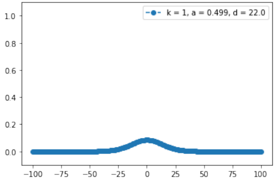
(a) t = 0



(b) t = 0,6



(c) t = 1,5



(d) t = 6

Figure – $(I_j^5(t))_{j\in[\![-100,100]\!]}$ pour $t \in \{0; 0,6; 1,5; 6\}$

Propagation

Proposition (Propagation)

Supposons qu'il existe $U_* \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$ décroissante et $c_* > 0$ tels que :

$$\begin{cases} -c_* U_*'(x) &= d(U_*(x-1) - 2U_*(x) + U_*(x+1)) \\ & \quad +f(U_*(x)), \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ \lim\limits_{x \to -\infty} U_*(x) &= 1, \\ \lim\limits_{x \to +\infty} U_*(x) &= 0. \end{cases}$$

Alors, il existe $\ell_1 > 0$ tel que pour tout $\ell \geq \ell_1$, la solution $(I_j^\ell)_{j \in \mathbb{Z}}$ vérifie :

$$I_j^\ell(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} 1, \quad \forall j \in \mathbb{Z}.$$

Exemple : propagation

- $a = 0,2$
- $d = 0,1$
- $\ell = 0.$

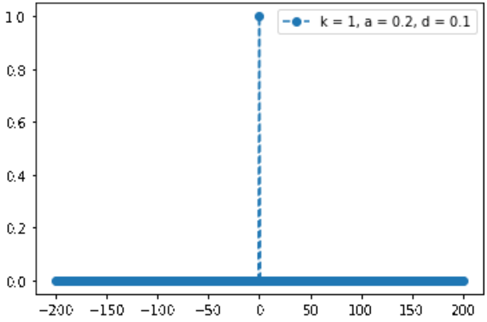
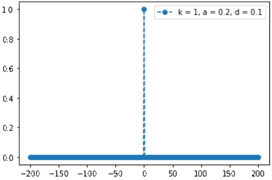
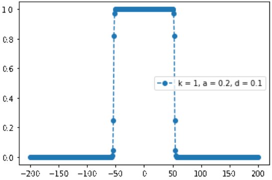


Figure – $(I_j(0))_{j \in [\![-200,200]\!]}$

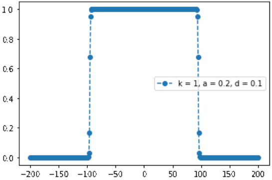
Exemple : propagation



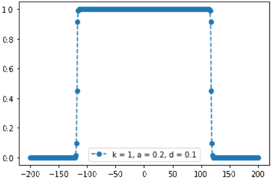
(a) t = 0



(b) t = 400



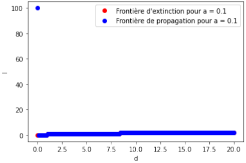
(c) t = 800



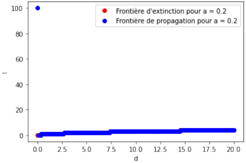
(d) t = 100

Figure – $(I_j^0(t))_{j \in [\![-200,200]\!]}$ pour $t \in \{0; 400; 800; 1000\}$

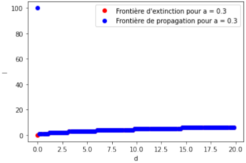
Bilan : diagrammes de bifurcation



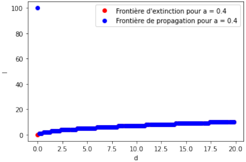
(a) a = 0,1



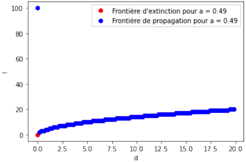
(b) a = 0,2



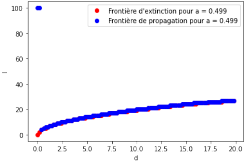
(c) a = 0,3



(d) a = 0,4



(e) a = 0,49



(f) a = 0,499

Figure – Diagrammes de bifurcation des régimes asymptotiques des solutions $(I_j^\ell)_{j\in\mathbb{Z}}$ pour $a \in \{0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,49; 0,499\}$

Et quand il n'y a ni l'un ni l'autre ?

Proposition (Blocage des solutions)

Supposons qu'il existe $0 < \hat{x}_0 < \bar{x}_0 < \bar{x}_1 < \hat{x}_1 < 1$ *tels que :*

1. $2(\hat{x}_0 - 1) - \frac{f(\hat{x}_0)}{d} = 2(\bar{x}_0 - 1) - \frac{f(\bar{x}_0)}{d} = 0,$
2. $2(x - 1) - \frac{f(x)}{d} > 0, \quad \forall x \in (\hat{x}_0, \bar{x}_0),$
3. $2\hat{x}_1 - \frac{f(\hat{x}_1)}{d} = 2\bar{x}_1 - \frac{f(\bar{x}_1)}{d} = 0,$
4. $2x - \frac{f(x)}{d} < 0, \quad \forall x \in (\bar{x}_1, \hat{x}_1).$

Alors, pour toute solution $(I_j(t))_{j\in\mathbb{Z}}$ *de l'EDO, on a :*

$$\forall j \in \mathbb{Z}, \quad \begin{cases} I_j(0) \in [0, \bar{x}_0) & \Rightarrow \quad I_j(t) \in [0, \bar{x}_0), \quad \forall t \in \mathbb{R}^+, \\ I_j(0) \in (\bar{x}_1, 1] & \Rightarrow \quad I_j(t) \in (\bar{x}_1, 1], \quad \forall t \in \mathbb{R}^+. \end{cases}$$

Dans ce cas, $I_j(t)$ devrait converge vers une solution stationnaire U_j de l'EDO, mais je ne l'ai pas prouvé.