Soutenance de stage de M1

Les équations de Maxwell avec des formes différentielles : le cas en 3+1 dimensions vs 4 dimensions

Matthias HOSTEIN
Tuteur : Stefan SIEGMUND

ENS Rennes, Technische Universität Dresden

31 Août 2023

Table des matières

Les équations de Maxwell sous forme vectorielle : un changement de coordonnées mystérieux

Équations de Maxwell :

$$\text{div } \mathbf{D} = \rho \quad \text{(Maxwell-Gauss)} \qquad \textbf{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad \text{(Maxwell-Ampère)}$$

$$\text{div } \mathbf{B} = 0 \quad \text{(Maxwell-Thompson)} \qquad \textbf{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \text{(Maxwell-Faraday)}$$

+ relations constitutives dans le vide :

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} \qquad \mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}$$

Les équations de Maxwell sous forme vectorielle : un changement de coordonnées mystérieux

Équations de Maxwell :

$$\text{div } \mathbf{D} = \rho \quad \text{(Maxwell-Gauss)} \qquad \textbf{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad \text{(Maxwell-Ampère)}$$

$$\text{div } \mathbf{B} = 0 \quad \text{(Maxwell-Thompson)} \qquad \textbf{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \text{(Maxwell-Faraday)}$$

+ relations constitutives dans le vide :

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} \qquad \mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}$$

Si $\varphi \in \mathscr{C}^\infty\left(\mathbb{R}^3\right)$ est un difféo et J sa matrice jacobienne :

$$\mathbf{E'} = \left(J^{-1}\right)^T \mathbf{E} \qquad \mathbf{H'} = \left(J^{-1}\right)^T \mathbf{H}$$
$$\mathbf{D'} = \frac{J}{\det J} \mathbf{D} \qquad \mathbf{B'} = \frac{J}{\det J} \mathbf{B}$$

sont solutions des équations de Maxwell dans le nouveau système de coordonnées.

Les équations de Maxwell sous forme vectorielle : un changement de coordonnées mystérieux

$$\mathbf{E'} = \left(J^{-1}\right)^T \mathbf{E} \qquad \mathbf{H'} = \left(J^{-1}\right)^T \mathbf{H}$$
$$\mathbf{D'} = \frac{J}{\det J}\mathbf{D} \qquad \mathbf{B'} = \frac{J}{\det J}\mathbf{B}$$

Seul moyen de retrouver les relations constitutives dans le vide sous forme vectorielle (telles que formulées précédemment) :

$$J \in SO(3).$$

Il y a de la géométrie derrière...

Objectifs

Objectifs

- Reconstruire les equations de Maxwell avec des formes différentielles pour mieux comprendre.

Objectifs

- Reconstruire les equations de Maxwell avec des formes différentielles pour mieux comprendre.
- D'abord dans $\mathbb{R}^3$ (t sera un paramètre),

Objectifs

- Reconstruire les equations de Maxwell avec des formes différentielles pour mieux comprendre.
- D'abord dans $\mathbb{R}^3$ (t sera un paramètre),
- puis dans $\mathbb{R}^4$ avec un cadre géométrique particulier,

Objectifs

- Reconstruire les equations de Maxwell avec des formes différentielles pour mieux comprendre.
- D'abord dans $\mathbb{R}^3$ (t sera un paramètre),
- puis dans $\mathbb{R}^4$ avec un cadre géométrique particulier,
- enfin essayer de généraliser à des variétés plus générales de dimension 4.

Une notion géométrique très importante avant de commencer

Définition (Métrique sur une variété)

Soit M une variété (lisse) de dimension n. Une métrique g est une application (lisse) :

$$\begin{array}{rcl} g \quad : \quad M & \longrightarrow & \bigsqcup_{x \in M} \mathscr{L}_2\left(T_xM \times T_xM, \mathbb{R}\right) := T^{(2,0)}M \\ x & \longmapsto & g_x \in \mathscr{L}_2\left(T_xM \times T_xM, \mathbb{R}\right) \end{array}$$

- *symétrique en tout point*
- *non-dégénérée en tout point.*

On dit que (M, g) est une variété ***pseudo-Riemannienne*** *(et Riemannienne si g est définie positive partout).*

Exposition du problème

Les équations de Maxwell en 3+1 dimensions avec des formes différentielles

Les équations de Maxwell en 4 dimensions : comment simplifier et généraliser ?

- Le cas $\mathbb{R}^4$
- Peut-on généraliser ce cas ?

Les opérateurs différentiels : c'est plus simple d'écrire d

Dans $\mathbb{R}^3$ en coordonnées cartésiennes ($\mathbb{R}^3$ muni de la métrique euclidienne canonique), on a :

$$\nabla s = \begin{pmatrix} \partial_x s \\ \partial_y s \\ \partial_z s \end{pmatrix} \quad \textbf{rot } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \partial_y A_z - \partial_z A_y \\ \partial_z A_x - \partial_x A_z \\ \partial_x A_y - \partial_y A_x \end{pmatrix}$$

$$\text{div } \mathbf{B} = \partial_x B_x + \partial_y B_y + \partial_z B_z .$$

Les opérateurs différentiels : c'est plus simple d'écrire d

Dans $\mathbb{R}^3$ en coordonnées cartésiennes ($\mathbb{R}^3$ muni de la métrique euclidienne canonique), on a :

$$\nabla s = \begin{pmatrix} \partial_x s \\ \partial_y s \\ \partial_z s \end{pmatrix} \quad \textbf{rot } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \partial_y A_z - \partial_z A_y \\ \partial_z A_x - \partial_x A_z \\ \partial_x A_y - \partial_y A_x \end{pmatrix}$$

$$\text{div } \mathbf{B} = \partial_x B_x + \partial_y B_y + \partial_z B_z.$$

Avec les correspondances suivantes :

$$\alpha = A_x \,\mathrm{d}\, x + A_y \,\mathrm{d}\, y + A_z \,\mathrm{d}\, z \longleftrightarrow \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}$$

$$\beta = B_x \,\mathrm{d}\, y \wedge \mathrm{d}\, z + B_y \,\mathrm{d}\, z \wedge \mathrm{d}\, x + B_z \,\mathrm{d}\, x \wedge \mathrm{d}\, y \longleftrightarrow \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix}$$

$$c \,\mathrm{d}\, x \wedge \mathrm{d}\, y \wedge \mathrm{d}\, z \longleftrightarrow c,$$

Les opérateurs différentiels : c'est plus simple d'écrire d

Avec les correspondances suivantes :

$$\alpha = A_x \,\mathrm{d}\, x + A_y \,\mathrm{d}\, y + A_z \,\mathrm{d}\, z \longleftrightarrow \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}$$

$$\beta = B_x \,\mathrm{d}\, y \wedge \mathrm{d}\, z + B_y \,\mathrm{d}\, z \wedge \mathrm{d}\, x + B_z \,\mathrm{d}\, x \wedge \mathrm{d}\, y \longleftrightarrow \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix}$$

$$c \,\mathrm{d}\, x \wedge \mathrm{d}\, y \wedge \mathrm{d}\, z \longleftrightarrow c,$$

on a simplement :

$$\mathrm{d}\, s \longleftrightarrow \nabla s,$$

$$\mathrm{d}\, \alpha \longleftrightarrow \mathbf{rot}\ \mathbf{A},$$

$$\mathrm{d}\, \beta \longleftrightarrow \mathrm{div}\ \mathbf{B}.$$

Le lemme de Poincaré : l'outil pour tout reconstruire à partir de la physique

Lemme (de Poincaré)

Soit U un ouvert étoilé de $\mathbb{R}^n$. Alors toute forme différentielle sur U est fermée si et seulement si elle est exacte.

Le lemme de Poincaré : l'outil pour tout reconstruire à partir de la physique

Lemme (de Poincaré)

Soit U un ouvert étoilé de $\mathbb{R}^n$. Alors toute forme différentielle sur U est fermée si et seulement si elle est exacte.

D'une densité de charge $\rho \in \mathscr{C}^\infty\left(\mathbb{R}, \Omega^3\left(\mathbb{R}^3\right)\right)$, on obtient :

$$\exists D \in \mathscr{C}^\infty\left(\mathbb{R}, \Omega^2\left(\mathbb{R}^3\right)\right), \quad \mathrm{d}\, D = \rho \text{ (M-G)},$$

et

$$\exists j \in \mathscr{C}^\infty\left(\mathbb{R}, \Omega^2\left(\mathbb{R}^3\right)\right), \quad \mathrm{d}\, j = -\partial_t \rho, \text{ (eq. de continuité)}$$

Le lemme de Poincaré : l'outil pour tout reconstruire à partir de la physique

Lemme (de Poincaré)

Soit U un ouvert étoilé de $\mathbb{R}^n$. Alors toute forme différentielle sur U est fermée si et seulement si elle est exacte.

D'une densité de charge $\rho \in \mathscr{C}^\infty\left(\mathbb{R}, \Omega^3\left(\mathbb{R}^3\right)\right)$, on obtient :

$$\exists D \in \mathscr{C}^\infty\left(\mathbb{R}, \Omega^2\left(\mathbb{R}^3\right)\right), \quad \mathrm{d}\, D = \rho \text{ (M-G)},$$

et

$$\exists j \in \mathscr{C}^\infty\left(\mathbb{R}, \Omega^2\left(\mathbb{R}^3\right)\right), \quad \mathrm{d}\, j = -\partial_t \rho, \text{ (eq. de continuité)}$$

d'où :

$$\mathrm{d}(j + \partial_t D) = 0$$

et vous devinez la suite...

Le lemme de Poincaré : l'outil pour tout reconstruire à partir de la physique

$$\mathrm{d}(j + \partial_t D) = 0$$

et vous devinez la suite...

Le lemme de Poincaré : l'outil pour tout reconstruire à partir de la physique

$$\mathrm{d}(j + \partial_t D) = 0$$

et vous devinez la suite...

$$\exists H \in \mathscr{C}^\infty\left(\mathbb{R}, \Omega^1\left(\mathbb{R}^3\right)\right), \quad \mathrm{d}\, H = j + \partial_t D \text{ (M-A).}$$

Le lemme de Poincaré : l'outil pour tout reconstruire à partir de la physique

$$\mathrm{d}(j + \partial_t D) = 0$$

et vous devinez la suite...

$$\exists H \in \mathscr{C}^\infty\left(\mathbb{R}, \Omega^1\left(\mathbb{R}^3\right)\right), \quad \mathrm{d}\, H = j + \partial_t D \text{ (M-A).}$$

Pour M-T et M-F, on fait pareil, cette fois avec une densité de charge magnétique ρ^m.

Le lemme de Poincaré : l'outil pour tout reconstruire à partir de la physique

$$\mathrm{d}(j + \partial_t D) = 0$$

et vous devinez la suite...

$$\exists H \in \mathscr{C}^\infty\left(\mathbb{R}, \Omega^1\left(\mathbb{R}^3\right)\right), \quad \mathrm{d}\, H = j + \partial_t D \text{ (M-A).}$$

Pour M-T et M-F, on fait pareil, cette fois avec une densité de charge magnétique ρ^m. Mais... $\rho^m = 0$ en fait !

Le lemme de Poincaré : l'outil pour tout reconstruire à partir de la physique

$$\mathrm{d}(j + \partial_t D) = 0$$

et vous devinez la suite...

$$\exists H \in \mathscr{C}^\infty\left(\mathbb{R}, \Omega^1\left(\mathbb{R}^3\right)\right), \quad \mathrm{d}\, H = j + \partial_t D \text{ (M-A)}.$$

Pour M-T et M-F, on fait pareil, cette fois avec une densité de charge magnétique ρ^m. Mais... $\rho^m = 0$ en fait ! Ainsi :

$$\exists B \in \mathscr{C}^\infty\left(\mathbb{R}, \Omega^2\left(\mathbb{R}^3\right)\right), \quad \mathrm{d}\, B = \rho^m = 0, \text{ (M-T)}$$

et :

$$\exists E \in \mathscr{C}^\infty\left(\mathbb{R}, \Omega^1\left(\mathbb{R}^3\right)\right), \quad \mathrm{d}\, E = -\partial_t B. \text{ (M-F)}$$

Le lemme de Poincaré : l'outil pour tout reconstruire à partir de la physique

$$\mathrm{d}(j + \partial_t D) = 0$$

et vous devinez la suite...

$$\exists H \in \mathscr{C}^\infty\left(\mathbb{R}, \Omega^1\left(\mathbb{R}^3\right)\right), \quad \mathrm{d}\, H = j + \partial_t D \text{ (M-A)}.$$

Pour M-T et M-F, on fait pareil, cette fois avec une densité de charge magnétique ρ^m. Mais... $\rho^m = 0$ en fait ! Ainsi :

$$\exists B \in \mathscr{C}^\infty\left(\mathbb{R}, \Omega^2\left(\mathbb{R}^3\right)\right), \quad \mathrm{d}\, B = \rho^m = 0, \text{ (M-T)}$$

et :

$$\exists E \in \mathscr{C}^\infty\left(\mathbb{R}, \Omega^1\left(\mathbb{R}^3\right)\right), \quad \mathrm{d}\, E = -\partial_t B. \text{ (M-F)}$$

On n'a vu ni géométrie, ni relations constitutives encore...

Petit exercice

Retrouvez (et justifiez la construction !) l'équivalent en formes différentielles du potentiel vecteur **A** et du potentiel électrique ϕ tels que :

$$\mathbf{rot}\ \mathbf{A} = \mathbf{B}$$

et

$$\nabla\phi = \partial_t \mathbf{A} + \mathbf{E}.$$

Les relations constitutives avec l'opérateur de Hodge : là où la géométrie intervient

Définition (Opérateur de Hodge)

Soit (M, g) *est une variété pseudo-Riemannienne. L'application* $\Omega^0(M)$*-linéaire :*

$$* \quad : \quad \Omega^k(M) \quad \longrightarrow \quad \Omega^{n-k}(M),$$

telle que :

$$\forall \alpha, \beta \in \Omega^k(M),\ \forall x \in M, \quad (\alpha \wedge (*\beta))_x = \langle \alpha, \beta \rangle_x \sqrt{|\det(g_x)|}\, \mathrm{d}\, x^1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}\, x^n.$$

est un isomorphisme appelé opérateur de Hodge.

Les relations constitutives avec l'opérateur de Hodge : là où la géométrie intervient

Définition (Opérateur de Hodge)

Soit (M, g) *est une variété pseudo-Riemannienne. L'application* $\Omega^0(M)$*-linéaire :*

$$* \quad : \quad \Omega^k(M) \quad \longrightarrow \quad \Omega^{n-k}(M),$$

telle que :

$$\forall \alpha, \beta \in \Omega^k(M),\ \forall x \in M, \quad (\alpha \wedge (*\beta))_x = \langle \alpha, \beta \rangle_x \sqrt{|\det(g_x)|}\, \mathrm{d}\, x^1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}\, x^n.$$

est un isomorphisme appelé opérateur de Hodge.

Il dépend donc de la métrique !

Les relations constitutives avec l'opérateur de Hodge : là où la géométrie intervient

Pour les relations constitutives du début, $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$. Ainsi :

$$*(E_x \,\mathrm{d}\, x + E_y \,\mathrm{d}\, y + E_z \,\mathrm{d}\, z) = E_x \,\mathrm{d}\, y \wedge \mathrm{d}\, z + E_y \,\mathrm{d}\, z \wedge \mathrm{d}\, x + E_z \,\mathrm{d}\, x \wedge \mathrm{d}\, y.$$

Elles s'écrivent en fait :

$$B = \mu_0 * H \quad \text{et} \quad D = \varepsilon_0 * E.$$

Et les transformations par changement de coordonnées ?

Liste des opérateurs utilisés pour les equations de Maxwell :

- d
- ∂_t

L'opération $\left(\varphi^{-1}\right)^*$ commute avec les deux. Ainsi, les formes tirées en arrière doivent vérifier les equations de Maxwell.

Et les transformations par changement de coordonnées ?

Liste des opérateurs utilisés pour les equations de Maxwell :

- d
- ∂_t

L'opération $\left(\varphi^{-1}\right)^*$ commute avec les deux. Ainsi, les formes tirées en arrière doivent vérifier les equations de Maxwell.
On obtient :

$$\begin{aligned}\left(\varphi^{-1}\right)^* E \quad = \quad & \left(E_x(x,y,z)\frac{\partial x}{\partial u} + E_y(x,y,z)\frac{\partial y}{\partial u} + E_z(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial u}\right)\mathrm{d}\,u \\ & + \left(E_x(x,y,z)\frac{\partial x}{\partial v} + E_y(x,y,z)\frac{\partial y}{\partial v} + E_z(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial v}\right)\mathrm{d}\,v \\ & + \left(E_x(x,y,z)\frac{\partial x}{\partial w} + E_y(x,y,z)\frac{\partial y}{\partial w} + E_z(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial w}\right)\mathrm{d}\,w.\end{aligned}$$

Et les transformations par changement de coordonnées ?

$$
\begin{aligned}
\left(\varphi^{-1}\right)^* E \quad = \quad & \left(E_x(x,y,z)\frac{\partial x}{\partial u} + E_y(x,y,z)\frac{\partial y}{\partial u} + E_z(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial u}\right) \mathrm{d}\, u \\
& + \left(E_x(x,y,z)\frac{\partial x}{\partial v} + E_y(x,y,z)\frac{\partial y}{\partial v} + E_z(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial v}\right) \mathrm{d}\, v \\
& + \left(E_x(x,y,z)\frac{\partial x}{\partial w} + E_y(x,y,z)\frac{\partial y}{\partial w} + E_z(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial w}\right) \mathrm{d}\, w,
\end{aligned}
$$

et :

$$
\begin{aligned}
\left(\varphi^{-1}\right)^* B \quad = \quad & \left(B_x(x,y,z)\left(\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial w} - \frac{\partial y}{\partial w}\frac{\partial z}{\partial v}\right) + B_y(x,y,z)\left(\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial w} - \frac{\partial z}{\partial w}\frac{\partial x}{\partial v}\right)\right. \\
& \left. + B_z(x,y,z)\left(\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial w} - \frac{\partial x}{\partial w}\frac{\partial y}{\partial v}\right)\right) \mathrm{d}\, v \wedge \mathrm{d}\, w \\
& + \left(B_x(x,y,z)\left(\frac{\partial y}{\partial w}\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial w}\right) + B_y(x,y,z)\left(\frac{\partial z}{\partial w}\frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial w}\right)\right. \\
& \left. + B_z(x,y,z)\left(\frac{\partial x}{\partial w}\frac{\partial y}{\partial u} - \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial w}\right)\right) \mathrm{d}\, w \wedge \mathrm{d}\, u \\
& + \left(B_x(x,y,z)\left(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u}\right) + B_y(x,y,z)\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}\right)\right. \\
& \left. + B_z(x,y,z)\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right)\right) \mathrm{d}\, u \wedge \mathrm{d}\, v.
\end{aligned}
$$

Exposition du problème

Les équations de Maxwell en 3+1 dimensions avec des formes différentielles

Les équations de Maxwell en 4 dimensions : comment simplifier et généraliser ?

- Le cas $\mathbb{R}^4$
- Peut-on généraliser ce cas ?

De nouvelles quantités physiques en 4 dimensions

On travaille ici dans $\mathbb{R}^4$ avec les coordonnées $(t', x, y, z) = (ct, x, y, z)$ et une métrique particulière, notée η :

$$\eta = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

De nouvelles quantités physiques en 4 dimensions

On travaille ici dans $\mathbb{R}^4$ avec les coordonnées $(t', x, y, z) = (ct, x, y, z)$ et une métrique particulière, notée η :

$$\eta = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On définit alors les formes quadri-courant et quadri-potentiel :

De nouvelles quantités physiques en 4 dimensions

On travaille ici dans $\mathbb{R}^4$ avec les coordonnées $(t', x, y, z) = (ct, x, y, z)$ et une métrique particulière, notée η :

$$\eta = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On définit alors les formes quadri-courant et quadri-potentiel :

$$\bar{j} = c\rho + j \wedge \mathrm{d}\, t',$$

et

$$\bar{A} = \frac{\phi}{c} \mathrm{d}\, t' + A,$$

De nouvelles quantités physiques en 4 dimensions

On travaille ici dans $\mathbb{R}^4$ avec les coordonnées $(t', x, y, z) = (ct, x, y, z)$ et une métrique particulière, notée η :

$$\eta = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On définit alors les formes quadri-courant et quadri-potentiel :

$$\bar{j} = c\rho + j \wedge \mathrm{d}\, t',$$

et

$$\bar{A} = \frac{\phi}{c} \mathrm{d}\, t' + A,$$

ainsi que la forme de Faraday :

$$F = \mathrm{d}_4 \bar{A}.$$

De nouvelles quantités physiques en 4 dimensions

On travaille ici dans $\mathbb{R}^4$ avec les coordonnées $(t', x, y, z) = (ct, x, y, z)$ et une métrique particulière, notée η :

$$\eta = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On définit alors les formes quadri-courant et quadri-potentiel :

$$\bar{j} = c\rho + j \wedge \mathrm{d}\, t',$$

et

$$\bar{A} = \frac{\phi}{c} \mathrm{d}\, t' + A,$$

ainsi que la forme de Faraday :

$$F = \mathrm{d}_4 \bar{A}.$$

C'est cette forme qui va servir à simplifier les équations de Maxwell.

De nouvelles quantités physiques en 4 dimensions

$$\bar{j} = c\rho + j \wedge \mathrm{d}\, t', \quad \bar{A} = \frac{\phi}{c}\mathrm{d}\, t' + A, \quad F = \mathrm{d}_4 \bar{A}.$$

On a alors :

$$F = \frac{1}{c}E \wedge \mathrm{d}\, t' + B.$$

Et en appliquant $*_4$:

$$*_4 F = \mu_0(cD + \mathrm{d}\, t' \wedge H).$$

Les équations de Maxwell exprimées juste avec F

$$F = \frac{1}{c} E \wedge \mathrm{d}\, t' + B, \quad *_4 F = \mu_0 (cD + \mathrm{d}\, t' \wedge H).$$

Les équations de Maxwell exprimées juste avec F

$$F = \frac{1}{c} E \wedge \mathrm{d}\, t' + B, \quad *_4 F = \mu_0 (cD + \mathrm{d}\, t' \wedge H).$$

On a donc :

$$\mathrm{d}_4 F = 0 = -\frac{1}{c} (\mathrm{d}\, E + \partial_t B) \wedge \mathrm{d}\, t' + \mathrm{d}\, B$$

C'est parfaitement équivalent à M-T + M-F !

Les équations de Maxwell exprimées juste avec F

$$F = \tfrac{1}{c} E \wedge \mathrm{d}\, t' + B, \quad *_4 F = \mu_0 (cD + \mathrm{d}\, t' \wedge H).$$

On a donc :

$$\mathrm{d}_4 F = 0 = -\frac{1}{c} (\mathrm{d}\, E + \partial_t B) \wedge \mathrm{d}\, t' + \mathrm{d}\, B$$

C'est parfaitement équivalent à M-T + M-F ! De plus :

$$\mathrm{d}_4 (*_4 F) = \mu_0 \left(\mathrm{d}\, t' \wedge (\partial_t D - \mathrm{d}\, H) + c\, \mathrm{d}\, D\right).$$

Les équations de Maxwell exprimées juste avec F

$$F = \tfrac{1}{c} E \wedge \mathrm{d}\, t' + B, \quad *_4 F = \mu_0 (cD + \mathrm{d}\, t' \wedge H).$$

On a donc :

$$\mathrm{d}_4\, F = 0 = -\frac{1}{c} \left(\mathrm{d}\, E + \partial_t B\right) \wedge \mathrm{d}\, t' + \mathrm{d}\, B$$

C'est parfaitement équivalent à M-T + M-F ! De plus :

$$\mathrm{d}_4 (*_4 F) = \mu_0 \left(\mathrm{d}\, t' \wedge (\partial_t D - \mathrm{d}\, H) + c\, \mathrm{d}\, D\right).$$

L'équation

$$\mathrm{d}_4 (*_4 F) = \mu_0 \bar{j}$$

est donc parfaitement équivalente à M-A + M-G !

Résumons comment le lemme de Poincaré peut reconstruire les equations dans ce cas

Résumons comment le lemme de Poincaré peut reconstruire les equations dans ce cas

1. ρ et j + equation de continuité : $\mathrm{d}_4 \bar{j} = 0$

Résumons comment le lemme de Poincaré peut reconstruire les equations dans ce cas

1. ρ et j + equation de continuité : $\mathrm{d}_4 \bar{j} = 0$
2. Poincaré : $\mathrm{d}_4 G = \bar{j}$.

Résumons comment le lemme de Poincaré peut reconstruire les equations dans ce cas

1. ρ et j + equation de continuité : $\mathrm{d}_4 \bar{j} = 0$
2. Poincaré : $\mathrm{d}_4 G = \bar{j}$.
3. On définit : $H = -f_t^* \left(\imath_{\nabla \hat{t}} G\right)$ et $D = \frac{1}{c} f_t^* G$ (M-G + M-A)

Résumons comment le lemme de Poincaré peut reconstruire les equations dans ce cas

1. ρ et j + equation de continuité : $\mathrm{d}_4 \bar{j} = 0$
2. Poincaré : $\mathrm{d}_4 G = \bar{j}$.
3. On définit : $H = -f_t^* \left(\imath_{\nabla \hat{t}} G\right)$ et $D = \frac{1}{c} f_t^* G$ (M-G + M-A)
4. $*_4 G = \frac{-1}{\mu_0} F$ est une forme exacte

Résumons comment le lemme de Poincaré peut reconstruire les equations dans ce cas

1. ρ et j + equation de continuité : $\mathrm{d}_4 \bar{j} = 0$
2. Poincaré : $\mathrm{d}_4 G = \bar{j}$.
3. On définit : $H = -f_t^* \left(\imath_{\nabla \hat{t}} G\right)$ et $D = \frac{1}{c} f_t^* G$ (M-G + M-A)
4. $*_4 G = \frac{-1}{\mu_0} F$ est une forme exacte
5. On définit $E = c f_t^* (\imath_{\nabla \hat{t}} F)$ et $B = f_t^* F$ (M-F + M-T)

Un moyen de généraliser : les variétés feuilletées

Définition (Feuilletage d'une variété)

Un feuilletage de dimension p d'une variété N de dimension n est une décomposition en union disjointe $(\mathscr{L}_a)_{a\in A}$ telle que, pour toute carte locale (U,ψ) et pour tout $a \in A$:

$$U \cap \mathscr{L}_a = \left\{ x \in U \;\middle|\; \psi^i(x) = c_a^i,\ i \in [\![p+1, n]\!] \right\}.$$

Un moyen de généraliser : les variétés feuilletées

Définition (Feuilletage d'une variété)

Un feuilletage de dimension p d'une variété N de dimension n est une décomposition en union disjointe $(\mathscr{L}_a)_{a\in A}$ telle que, pour toute carte locale (U,ψ) et pour tout $a \in A$:

$$U \cap \mathscr{L}_a = \left\{ x \in U \;\middle|\; \psi^i(x) = c_a^i,\ i \in [\![p+1, n]\!] \right\}.$$

Pour une variété M de dimension 4, on a un feuilletage induit par un champ scalaire régulier $\hat{t}$:

$$\Sigma_t = \left\{ x \in M \;\middle|\; \hat{t}(x) = ct \right\}.$$

Un moyen de généraliser : les variétés feuilletées

Définition (Feuilletage d'une variété)

Un feuilletage de dimension p d'une variété N de dimension n est une décomposition en union disjointe $(\mathscr{L}_a)_{a\in A}$ telle que, pour toute carte locale (U,ψ) et pour tout $a \in A$:

$$U \cap \mathscr{L}_a = \left\{ x \in U \;\middle|\; \psi^i(x) = c_a^i,\ i \in [\![p+1, n]\!] \right\}.$$

Pour une variété M de dimension 4, on a un feuilletage induit par un champ scalaire régulier $\hat{t}$:

$$\Sigma_t = \left\{ x \in M \;\middle|\; \hat{t}(x) = ct \right\}.$$

Pour généraliser, on se placera dans ce cadre avec M muni d'une métrique η *Lorentzienne*, i.e. de signature $(-,+,+,+)$.

Le champ de vecteur temporel

Comment retrouver le $\nabla \hat{t}$ de $\mathbb{R}^4$?

Le champ de vecteur temporel

Comment retrouver le $\nabla \hat{t}$ de $\mathbb{R}^4$? On a :

$$\mathrm{d}\,\hat{t} \in \Omega^1(M).$$

Ainsi, grâce à η on peut définir le champ de vecteur $\nabla \hat{t}$ avec la propriété :

$$\forall x \in M, \forall v \in T_x M, \quad \mathrm{d}\,\hat{t}_x \cdot v = \eta_x\left(\nabla \hat{t}(x), v\right)$$

et la construction de $\mathbb{R}^4$ reste valide !

Le champ de vecteur temporel

Comment retrouver le $\nabla \hat{t}$ de $\mathbb{R}^4$? On a :

$$\mathrm{d}\,\hat{t} \in \Omega^1(M).$$

Ainsi, grâce à η on peut définir le champ de vecteur $\nabla \hat{t}$ avec la propriété :

$$\forall x \in M, \forall v \in T_x M, \quad \mathrm{d}\,\hat{t}_x \cdot v = \eta_x \left(\nabla \hat{t}(x), v\right)$$

et la construction de $\mathbb{R}^4$ reste valide !
Mais comment retrouver les équations de Maxwell ? i.e. comment définir ∂_t ? Il y a sûrement un lien avec la dérivée de Lie $\mathscr{L}_{\nabla \hat{t}}$...