Mémoire Agreg : Leçon 241 : Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples

Maxence Michot

Janvier 2025

Contents

Soit X un espace métrique et E un espace normé. (f_n) est une suite de fonctions $X \to E$ et $f : X \to E$

1 Définitions et propriétés

1.1 Modes de convergence

Définition 1. *On dit que (f_n) **converge simplement** vers f si, pour tout $x \in X$, $(f_n(x))$ tend vers $f(x)$ On dit que $\sum f_n$ converge simplement si la suite de ses sommes partielles converge simplement*

Définition 2. *On dit que (f_n) **converge uniformèment** vers f si*

$$\|f_n - f\| \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

On dit que $\sum f_n$ converge uniformèment si la suite de ses sommes partielles converge uniformèment

Exemple 3.

$$f_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto (1 - \frac{x}{n})^n$$

converge simplement et uniformèment vers $x \mapsto e^{-x}$

Exemple 4.

$$f_n : [0, 1[\to [0, 1[$$
$$x \mapsto x^n$$

converge simplement vers 0, mais pas uniformèment. Par contre, elle converge uniformèment sur tout $[0, \delta]$*, avec* $\delta < 1$

Proposition 5. *La convergence uniforme implique la convergence simple*

Proposition 6. *Si les fonctions* f_n *sont* K*-lipschitziennes et tendent vers* f *simplement, alors, la convergence est uniforme*

Théorème 7 (Dini)**.** *Si* X *est compact,* $E = \mathbb{R}$ *et* (f_n) *une suite de fonctions continues telle que* (f_n) *est une suite croissante qui tend simplement vers* f*. Alors* (f_n) *converge uniformèment vers* f*.*

Théorème 8 (Weierstass)**.** *Soit* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *une fonction continue. Alors,* f *est limite uniforme de polynomes.*

Théorème 9 (Critère de Cauchy uniforme)**.** *On suppose que* E *est un Banach. Alors,* (f_n) *converge uniformément si, et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p, q \geq N, \|f_p - f_q\| \leq \varepsilon$$

Définition 10. *On dit que* $\sum f_n$ ***converge normalement*** *si* $\sum \|f_n\|$ *est une série numérique convergente*

Proposition 11. *La convergence normale d'une série implique sa convergence uniforme*

Exemple 12. $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{(-1)^n x^n}{n}$ *converge uniformèment mais pas normalement*

1.2 Propagation de régularité et interversion de symboles

Proposition 13. *Soit* (f_n) *une suite de fonctions continues qui converge uniformèment vers* f*. Alors,* f *est continue*

Corollaire 14. *Si* $\sum f_n$ *converge uniformèment vers* f*, alors,* f *est continue*

Exemple 15. *On définit, pour* $s > 1$*,* $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$*. Alors,* ζ *est continue*

Proposition 16. *Si E est un Banach et (f_n) converge uniformément vers f, alors, f est continue et*

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(t)dt$$

Proposition 17. *Soit $k \in \mathbb{N}$ et (f_n) une suite de fonctions $\mathcal{C}^k$. Supposons que pour tout $p \in [\![0, k]\!]$, $(f_n^{(k)})$ converge uniformément vers g_k. Alors, g_0 est de classe $\mathcal{C}^k$ et vérifie, pour $p \in [\![0, k]\!]$, $g_0^{(p)} = g_p$.*

Exemple 18. *Soit E une algèbre normée complète et $u \in E$. Alors,*

$$\begin{aligned} exp_u : \mathbb{R} &\to E \\ t &\mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} u^n \end{aligned}$$

est $\mathcal{C}^\infty$

Remarque 19. *La convergence des (f'_n) est primordiale, celle des (f_n) ne suffit pas. Par exemple, $(x \mapsto \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}})_n$ converge uniformément vers $x \mapsto |x|$, qui n'est pas $\mathcal{C}^1$*

1.3 Interversion et Intégrale de Lebesgue

A partir de maintenant, X est un espace mesuré et μ est une mesure sur X, et $E = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Théorème 20 (Convergence monotone)**.** *Soit (f_n) une suite de fonctions positives mesurables telle que (f_n) est croissante et soit qui converge simplement presque partout vers f. Alors, f est mesurable et*

$$\int_X f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu$$

Corollaire 21 (Fatou)**.** *Si (f_n) est une suite de fonctions positives et mesurables, alors,*

$$\int_X \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu$$

Exemple 22. *Soit $f_n = 1_{[\![n,n+1]\!]}$. Alors (f_n) converge simplement vers 0 mais*

$$\int_{\mathbb{R}} f_n d\mu = 1 \neq 0$$

Théorème 23 (Convergence dominée)**.** *Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables qui converge simplement vers f. Si il existe $g \in L^1(\mu)$ telle que*

$$\forall x \in X, |f_n(x)| \leq |g(x)|$$

Alors,

$$\lim_{n\to\infty}\int_X |f_n - f| d\mu = 0$$

Exemple 24. *Définissons*

$$\begin{aligned} f_n : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1_{[1,n]}}{x} \end{aligned}$$

Alors f_n converge simplement vers $x \mapsto \frac{1}{x}$, mais on a pas $\lim_{n\to\infty}\int_n^\infty \frac{dx}{x} = 0$

2 Séries entières

2.1 Séries entières

Définition 25. *Soit (a_n) une suite de nombres complexes. On appelle **Série entière** toute séries de fonction de la forme $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ où z est une variable complexe.*

Proposition 26 (Lemme d'Abel)**.** *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière et $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $(|a_n| z_0^n)$ soit bornée. Alors,*

1. *Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $z < |z_0|$, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.*
2. *Pour tout r tel que $0 < r < |z_0|$, la série $\sum a_n z^n$ est normalement convergente sur $D(0, r)$*

Définition 27. *On définit le **Rayon de convergence** d'une série entière comme étant $R \in [0, +\infty]$ tel que*

$$R = \sup\{r \geq 0, (|a_n| r^n) \text{ est bornée}\}$$

Proposition 28 (D'Alembert)**.** *Si (a_n) ne s'annule qu'un nombre fini de fois, et que la limite suivante existe,*

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$$

Proposition 29 (Cauchy)**.** *Si la limite suivante existe,*

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}$$

Exemple 30. $\sum \frac{z^n}{n!}$ *a un rayon de convergence infini et* $\sum n! z^n$ *a un rayon de convergence nul*

Proposition 31. *La somme d'une série entière est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R, R[$*

Proposition 32 (Abel Radial). *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence ≥ 1 telle que $\sum a_n$ converge. On note f la somme de cette série entière sur le disque unité. Soit $\theta_0 \in [0, \frac{\pi}{2}[$. On fixe le domaine angulaire*

$$\Delta_{\theta_0} = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1 \text{ et } \exists \rho > 0, \exists \theta \in [-\theta_0, \theta_0], z = 1 - pe^{i\theta}\}$$

Alors,

$$\lim_{z \to 1, z \in \Delta_{\theta_0}} f(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$$

Exemple 33.

$$\log(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

Théorème 34 (Taubérien fort). *[DEV1] Soit (a_n) une suite réelle telle que $a_n = O(\frac{1}{n})$. Si $\lim_{x \to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = l$, alors,*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = l$$

Preuve 35. *Quitte à remplacer (a_n) par la suite (b_n) avec $b_0 = a_0 - l$ et $b_n = a_n$ pour $n \geq 1$, on peut supposer $l = 0$.*

Etape 1 : *Montrons le lemme suivant : Si $P \in \mathbb{R}[X]$, alors,*

$$\lim_{x \to 1^-} (1 - x) \sum_{n \in \mathbb{N}} x^n P(x^n) = \int_0^1 P$$

Si P est un monôme, par exemple $P : x \mapsto x^k$ avec $k \in \mathbb{N}^*$, alors,

$$\begin{aligned}(1 - x) \sum_{n \in \mathbb{N}} x^{(k+1)n} &= \frac{1 - x}{1 - x^{(k+1)}} \\ &= \frac{1}{\sum_{i=0}^{k} x^i}\end{aligned}$$

D'où $\lim_{x \to 1^-} (1 - x) \sum_{n \in \mathbb{N}} x^{n(k+1)} = \frac{1}{k+1} = \int_0^1 P$
On en déduit le résultat par linéarité de la somme et de l'intégrale
Étape 2 : *Soit*

$$\begin{aligned}\mathcal{F} = \{&\phi : [0, 1] \to \mathbb{R} \text{ telles que} \\ &(i)\ \forall x \in [0, 1[, \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \phi(x^n) < +\infty, \\ &(ii)\ \lim_{x \to 1^-} \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \phi(x^n) = 0\}\end{aligned}$$

On remarque que si $g = 1_{[1/2,1]} \in \mathcal{F}$, alors,

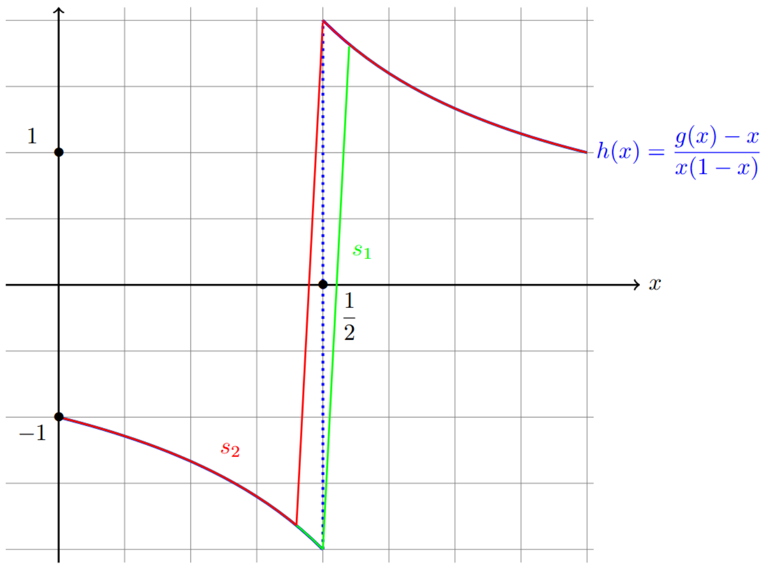

Figure 1: Encadrement de h par 2 fonctions continues (Source : Matthias Hostein)

$$\lim_{x \to 1^-} \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n g(x^n) = \lim_{x \to 1^-} \sum_{n=0}^{\lfloor -\log(2)/\log(x) \rfloor} a_n = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n = 0$$

ce qui conclut la preuve. Il suffit donc de montrer que $g \in \mathcal{F}$

Etape 3 : *Montrons que $g \in \mathcal{F}$*

Tout d'abord, il est clair que si P est un polynôme nul en 0, $P \in \mathcal{F}$. g vérifie aussi clairement l'hypothèse (i) Notons $h : x \mapsto \frac{g(x)-x}{x(1-x)}$. Notre but va être d'encadrer h par deux polynomes tels que l'intégrale de la différence de ces deux polynômes est petite. Pour cela, fixons un $\varepsilon > 0$ et encadrons h par deux fonctions continues s_1 et s_2 comme sur le diagramme ci-dessus

On a donc $s_1 \leq h \leq s_2$ et $\int_0^1 s_2 - s_1 < \varepsilon$. On utilise ensuite le théorème de Weierstrass pour trouver t_1 et t_2 tels que $\|t_1 - s_1\|_\infty \leq \varepsilon$ et $\|t_2 - s_2\|_\infty \leq \varepsilon$. On a donc :

1. $t_1 - \varepsilon \leq h \leq t_2 + \varepsilon$
2. $\int_0^1 t_2 - t_1 \leq 3\varepsilon$

Donc,

$$P_1(x) = x + x(1-x)(t_1 - \varepsilon) \leq g \leq x + x(1-x)(t_2 + \varepsilon) = P_2(x)$$

Or, si l'on note q le polynome $\frac{P_2(x)-P_1(x)}{x(1-x)}$, on a $\int_0^1 q \leq 5\varepsilon$.
Nous sommes presques prêts pour conclure:

$$\begin{aligned}|\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n g(x^n)| = |\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n g(x^n) - \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n P_1(x^n)| &\leq \sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n| P_2 - P_1(x^n) \\ &\leq M \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{x^n(1-x^n)}{n} q(x^n) \\ &\leq M(1-x) \sum_{n\in\mathbb{N}} x^n q(x^n)\end{aligned}$$

Ou nous avons utilisé, à la ligne 1, le fait que P_1 est un polynôme nul en 0, donc est dans $\mathcal{F}$, à la ligne 2, l'hypothèse selon laquelle $a_n = O(\frac{1}{n})$, et à la ligne 3 la majoration $(1-x^n) \leq n(1-x)$ pour $x \in [0,1]$

Or, d'après le lemme, en faisant tendre x vers 1^- cela est plus petit que $\int_0^1 q \leq 5\varepsilon$. Ceci conclut le fait que g vérifie (ii), donc $g \in \mathcal{F}$, ce qui conclut la preuve

2.2 Fonctions holomorphes

Soit Ω un ouvert connexe par arcs du plan complexe

Théorème 36. *Si $f \in H(\Omega)$, alors f est développable en série entière au voisinage de tout point $a \in \Omega$. Si R est tel que $B(a,R) \subset \Omega$, alors, pour tout $0 < r < R$, pour tout $z \in B(a,r)$*

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n (z-a)^n$$

avec $a_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial B(a,r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}} d\zeta$

Théorème 37. *Soit (X,μ) un espace mesuré et $f : \Omega \times X \to \mathbb{C}$ telle que*

1. *$\forall z \in \Omega$, $x \mapsto f(z,x)$ est μ-mesurable*
2. *$\forall x \in X$, $z \mapsto f(x,z) \in H(\Omega)$*
3. *$\exists g \in L^1(\mu), \forall x \in X, \forall z \in \Omega, |f(x,z)| < |g(x)|$*

Alors,

$$\begin{aligned}F : \Omega &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto \int_X f(x,z) dx\end{aligned}$$

est bien définie et holomorphe

Exemple 38. *Γ est holomorphe sur $Re(z) > 0$*

Exemple 39. *ζ est holomorphe sur $Re(z) > 1$*

3 Séries de Fourier

e_n désigne l'application $t \mapsto e^{-int}$

Définition 40. *Soit $f \in L^1_{2\pi}$ et $n \in \mathbb{Z}$. On appelle n ième coefficient de Fourier de f :*

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt$$

De même, on définit $a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)dt$ et $b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)dt$

Définition 41. *Définissons $S_N(f) = \sum_{n=-N}^{N} c_n(f) e_n$ la somme partielle des coefficients de Fourier et $K_n(f) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} S_n(f)$ leur moyenne de Césaro.*

Proposition 42. *Si f est de classe $\mathcal{C}^k$, $c_n(f) = o(\frac{1}{n^k})$*

Théorème 43 (Féjer)**.** *Soit $f \in \mathcal{C}^0_{2\pi}$. Alors,*

$$\|K_n(f) - f\|_\infty \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

Théorème 44 (Perseval)**.** *Si $f \in L^2_{2\pi}$,*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt$$

Exemple 45. *Pour*

$$\begin{aligned} f : [-\pi, \pi] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto 1 - \frac{x^2}{\pi^2} \end{aligned}$$

On a, $a_0(f) = \frac{4}{3}$ et, pour $n \geq 1$, $a_n(f) = (-1)^{n+1} \frac{4}{\pi^2 n^2}$

Corollaire 46. $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$
$\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$

Théorème 47 (Formule sommatoire de Poisson)**.** *[DEV2] Soit $f \in \mathcal{C}^1$ tels que $f = O(\frac{1}{x^2})$, $f' = O(\frac{1}{x^2})$. Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$,*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(t + 2\pi n) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{int}$$

Preuve 48. *Soit*

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(t + 2n\pi) \end{aligned}$$

Fixons un segment $[-A, A]$ *et* $M > 0$ *tel que* $|f(x)| \leq \frac{M}{1+x^2}$*. Alors, pour* $t \in [-A, A]$*, pour* $n \in \mathbb{Z}$*,* $|n| > A + 1$*,*

$$|f(t + 2\pi n)| \leq \frac{M}{(x + 2\pi n)^2} \leq \frac{M}{(|2\pi n| - K)^2}$$

Donc, F *est bien définie. Par le même argument,* $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f'(t+2n\pi)$ *converge uniformèment sur tout segment, donc, par théorème de dérivation sous le signe somme,* F *est de classe* $\mathcal{C}^1$*. De plus,* F *est* 2π*-périodique*

Calculons à présent les coefficients de Fourier de F ¨*: Par convergence absolue de la série des* $f(t + 2n\pi)$*, on va pouvoir interhcanger le signe somme et intégral. Soit* $k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} c_k(F) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(t + 2n\pi) e^{-ikt} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_0^{2\pi} f(t + 2n\pi) e^{-ikt} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_{2n\pi}^{2(n+1)\pi} f(t) e^{-ikt} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \hat{f}(k) \end{aligned}$$

Comme F *est* $\mathcal{C}^1$*,* F *est somme de sa série de Fourier. Donc,*

$$F(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(t + 2\pi n) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{int}$$

Corollaire 49 (DEV2)**.** *On pose :*

$$\begin{aligned} \Theta : \mathbb{R}_+^* &\to \mathbb{R}_+^* \\ s &\mapsto \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 s} \end{aligned}$$

Alors, $\forall s > 0$*,* $\Theta(s) = \frac{1}{\sqrt{s}} \Theta(\frac{1}{s})$

Preuve 50. *L'idée va être d'appliquer la formule de Poisson à la fonction* $f : t \mapsto e^{-\alpha t^2}$*, avec* $\alpha = \frac{s}{4\pi}$*.*

Calculons la transformée de Fourier de f *:*

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-i\xi t} dt$$

Pour trouver sa valeur, dérivons la sous le signe intégral, et résolvons l'équation différentielle associée. On trouve, en utilisant la valeur de l'intégrale de Gauss,

$$\hat{f}(\xi) = \frac{2\pi}{\sqrt{s}} e^{-\frac{\pi \xi^2}{s}}$$

Donc, en appliquant la formule de poisson en $t = 0$, on trouve :

$$\begin{aligned}\Theta(s) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(0+2\pi n) &= \frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n) \\ &= \frac{1}{\sqrt{s}}\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{\frac{-\pi\xi^2}{s}} = \frac{1}{\sqrt{s}}\Theta(\frac{1}{s})\end{aligned}$$

References

[GOU] XAVIER GOURDON *Analyse*

[AMR] MOHAMMED EL AMRANI *Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels*

[AMR2] MOHAMMED EL AMRANI *Suites et Séries numériques. Suites et séries de fonctions*

[RUD] WALTER RUDIN *Analyse réelle et complexe*

[HAU] BERTRAND HAUCHECORNE *Les contre-exemples en mathématiques*

[BP] MARC BRIANE, GILLES PAGÈS *Théorie de l'intégration*