

# Cœurs de partitions

Maxence MICHOT \*      Sylvain CHAURAND \*

Avril 2023

## Résumé

Dans cet article, on va vouloir se familiariser avec les partitions d'entier, les diagrammes de Young, les partitions qui sont à la fois  $s$  et  $t$ -cœurs pour  $s$  et  $t$  premiers entre eux. On montrera qu'il y en a un nombre fini, et on explicitera ce nombre en trouvant une bijection entre ces partitions et les chemins de Dyck d'après un résultat de Anderson [An]. Ensuite, nous parlerons de résultats généraux qui sont connus à ce sujet, ainsi que des applications des  $t$ -cœurs, majoritairement à la théorie de la représentation du groupe symétrique.

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Cœurs de partitions</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Cœurs simultanés</b>	<b>9</b>
<b>4</b>	<b>Applications et résultats généraux</b>	<b>16</b>
<b>5</b>	<b>Problèmes encore ouverts</b>	<b>19</b>

## 1 Introduction

Le problème de dénombrer le nombre de partitions d'un entier  $n$  est un problème connu depuis plus d'une centaine d'années en mathématiques.

---

\*ENS Rennes

**Définition 1.1.** Une *partition* d'un entier  $n \in \mathbb{N}$  est une suite :

$$\lambda = (\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_s > 0),$$

décroissante d'entiers strictement positifs de somme  $|\lambda| := \sum_{i=1}^s \lambda_i = n$ .

**Définition 1.2.** On définit le *nombre de partitions d'un entier  $n$* , qu'on note  $p(n)$ , qui est le nombre de moyens de partitionner un entier  $n$ , autrement dit, le nombre de suite finies  $\lambda = (\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_s > 0)$  qui sont une partition de  $n$

*Exemple 1.3.* Par exemple,  $p(3) = 3$ . En effet, on peut écrire  $3 = 3 = 2 + 1 = 1 + 1 + 1$ . De même,  $p(6) = 11$ , car

$$\begin{aligned} 6 = 6 = 5 + 1 = 4 + 2 = 4 + 1 + 1 = 3 + 3 = 3 + 2 + 1 = 3 + 1 + 1 + 1 = 2 + 2 + 2 \\ = 2 + 2 + 1 + 1 = 2 + 1 + 1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 \end{aligned}$$

On connaît la formule récursive suivante sur les partitions :

**Théorème.**

$$p(n) = \sum_{k \geq 1} (-1)^{k-1} \left( p\left(n - \frac{k(3k-1)}{2}\right) + p\left(n - \frac{k(3k+1)}{2}\right) \right)$$

où  $p(n)$  est le nombre de partitions de  $n$  pour  $n \geq 0$  et  $p(n)$  vaut 0 pour  $n < 0$ .

*Exemple 1.4.* On a, par exemple, pour  $n = 4$ ,  $p(4) = 1(p(4-1) + p(4-2))$ , ce qui est bien vrai car  $p(4) = 5, p(3) = 3, p(2) = 2$ .

Hardy et Ramanujan, lors de leur travail en commun, ont beaucoup travaillé sur les partitions. On doit à Ramanujan le résultat suivant :

**Théorème.**

$$p(5k + 4) \equiv 0 \pmod{5}$$

$$p(7k + 5) \equiv 0 \pmod{7}$$

$$p(11k + 6) \equiv 0 \pmod{11}$$

Hardy et Ramanujan ont également introduit une nouvelle méthode d'analyse complexe aboutissant au résultat asymptotique suivant sur le nombre de partitions :

**Théorème 1.5.**

$$p(n) \sim \frac{1}{4n\sqrt{3}} \exp\left(\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}\right)$$

Les partitions d'un entier sont des objets assez simples, dans le sens où il n'est pas nécessaire de connaître beaucoup de choses pour comprendre leur définition. Cependant, il n'est pas si facile de les dénombrer, comme peut le montrer Théorème 1 ou Théorème 1.5. Ces partitions apparaissent notamment dans la théorie des représentations du groupe symétrique, voir [JK]. On sait que les classes de conjugaisons de  $S_n$  sont exactement les permutations ayant le même type. Or se donner le type d'une partition est équivalent à se donner une partition de  $n$ . On en déduit le théorème :

**Théorème.** Soit  $R$  la relation de conjugaison entre 2 permutations. Alors,

$$|S_n/R| = p(n)$$

En particulier, les partitions de  $n$  indexent les représentations irréductibles du groupe symétrique  $S_n$  en caractéristique nulle. Cependant le résultat ne tient plus en caractéristique  $p$  non nulle, et il faut alors étudier la notion de  $p$ -cœurs pour obtenir des informations précises sur les représentations irréductibles de  $S_n$  en caractéristique  $p$ . Par exemple, le théorème suivant, appelé conjecture de Nakayama renseigne sur les représentations irréductibles de  $S_n$  :

**Théorème 1.6.** Soit  $p$  un nombre premiers. Deux représentations irréductibles ordinaires  $[\alpha]$  et  $[\beta]$  de  $S_n$  appartiennent au même  $p$ -bloc si et seulement si leurs  $p$ -cœurs sont égaux.

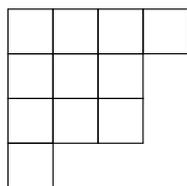
*Remarque 1.7.* C'est le théorème 6.1.21 de [JK])

De plus, cela se généralise même pour les  $p$  non premiers via la théorie des algèbres de Iwahori-Hecke, qui sont des "déformations" de l'algèbre de groupe  $S_n$ , comme fait par exemple dans [Ma].

## 2 Cœurs de partitions

**Définition 2.1.** Le *diagramme de Young*, aussi appelé *diagramme de Ferrers-Young* associé à une partition  $\lambda = (\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_s > 0)$  est une collection finie de cases, ou cellules, organisée en lignes alignées à gauche, avec la propriété que la  $i$ -ième ligne est de taille  $\lambda_i$ . Les longueurs des lignes décroissent donc au sens large (chaque ligne est aussi longue ou plus longue que la précédente). La suite des longueurs des lignes donne une partition  $\lambda$  de l'entier  $n$  qui est le nombre total de cases du diagramme

*Exemple 2.2.* Le diagramme de Young de la partition  $(4, 3, 3, 1)$  est :



**Définition 2.3.** Si on a un tableau de Young donné, et si on note  $\lambda'_j$  le nombre de de cases dans la colonne  $j$ , alors la case en position  $(i, j)$  peut être associée une *équerre de taille* :

$$H(i, j) = (\lambda_i - i) + (\lambda'_j - j) + 1$$

ce qui correspond au nombre de cellules directement à la droite ou en dessous de la cellule en position  $(i, j)$ , plus 1 pour elle même.

*Exemple 2.4.* Un exemple de la taille des équerres pour une partition de  $\lambda = (4, 3, 3, 1)$

7	5	4	1
5	3	2	
4	2	1	
1			

**Définition 2.5.** Pour un  $t \in \mathbb{N}$ , on dit qu'une partition est  $t$ -cœur si aucune équerre de son tableau de Young n'est de taille divisible par  $t$ .

*Exemple 2.6.* La partition présente ci-dessus est un 6-cœur

*Remarque 2.7.* Une partition d'un entier  $n$  est  $k$ -cœur, pour  $k > n$

**Définition 2.8.** On définit un  $t$ -abaque comme un tableau à  $t$  colonnes, numérotée de 0 à  $t - 1$ , et qui possède un nombre infini de lignes.

*Exemple 2.9.* Un  $t$ -abaque pour  $t = 7$  :

	0	1	2	3	4	5	6
1							
2							
3							
4							
...							

**Définition 2.10.** Pour  $i \in \llbracket 1, s \rrbracket$ , on définit le *nombre de bille de la ligne  $i$*  ou *position de bille de la ligne  $i$*  comme étant

$$B_i = \lambda_i - i + s$$

*Remarque 2.11.* Se donner une partition de  $\lambda$  est équivalent à se donner des nombres de billes

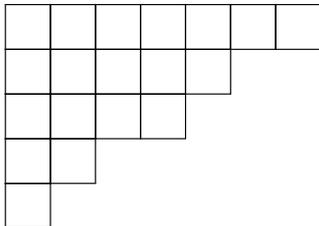
Comme les  $\lambda_i$  sont décroissants, les  $B_i$  sont strictement décroissants. On va ensuite placer ces billes sur l'abaque :

On effectue la division euclidienne de  $B_i$  par  $t$  : Soit  $(r_i, r'_i)$  tels que

$$B_i = t(r_i - 1) + r'_i$$

On va ensuite placer  $B_i$  billes sur le case  $(r_i, r'_i)$  de l'abaque.

Exemple 2.12. Le diagramme de Young suivant :



associé à la partition  $\lambda = (7 \geq 5 \geq 4 \geq 2 \geq 1)$  où  $|\lambda| = 19$  dont les tailles des équerres sont de :

11	9	7	6	4	2	1
8	6	4	3	1		
6	4	2	1			
3	1					
1						

possède un 6-abaque suivant :

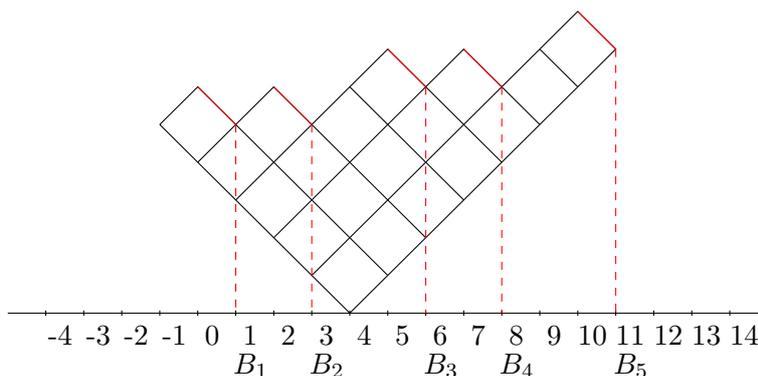
	0	1	2	3	4	5
0		$B_5$		$B_4$		
1	$B_3$		$B_2$			$B_1$
2						
...						

et un 3-abaque

	0	1	2
0		$B_5$	
1	$B_4$		
2	$B_3$		$B_2$
3			$B_1$
...			

En effet, on a bien  $B_5 = 1$ ,  $B_4 = 3$ ,  $B_3 = 6$ ,  $B_2 = 8$ ,  $B_1 = 11$

*Exemple 2.13.* Il est également possible de voir les  $B_i$  directement sur les diagrammes de Young en utilisant la convention russe :



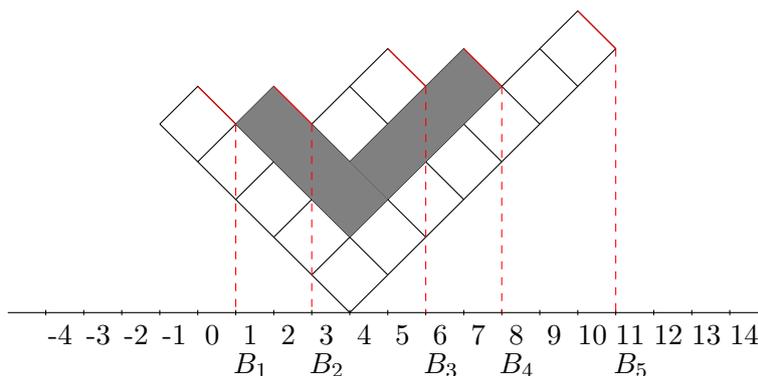
En effet, la formule  $B_i = \lambda_i - i + s$  nous montre bien que les positions  $B_i$  sont à ces endroits là. On retrouve les  $\lambda_i$  en comptant le nombre de trous à gauche et sur les lignes en haut de chaque  $B_i$ .

**Lemme 2.14.** Soit  $\lambda = (\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_s > 0)$  une partition d'un entier  $n$ . Alors, le diagramme de Young de  $\lambda$  a une équerre de taille  $t$  si, et seulement si, il existe un nombre de bille  $B_i$ , qui est strictement supérieur à  $t$ , et tel que  $B_i - t$  ne soit pas un nombre de bille. De plus, en notant  $\mu$  la partition dans laquelle on a enlevée l'équerre de taille  $t$ , alors cette partition a les mêmes nombres de bille que  $\lambda$ , excepté  $B_i$  qui est changé en  $B_i - t$

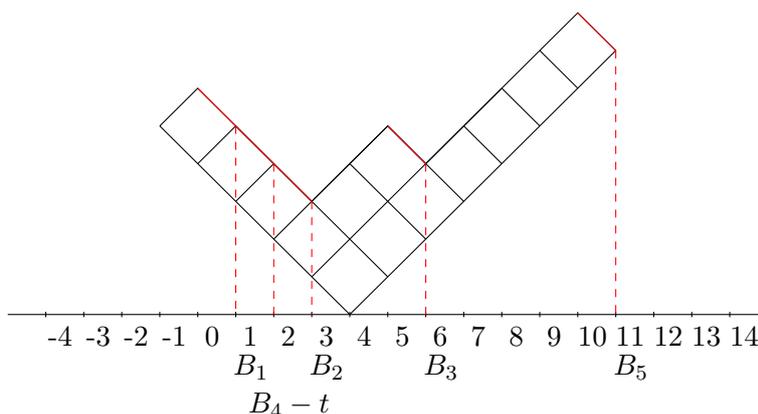
*Remarque 2.15.* Cela est le lemme 2.7.13 dans [JK], et provient de la théorie des représentations et de la formule de Murnaghan-Nakayama. De plus, la preuve donnée ci-dessous est plus une ébauche de preuve et une explication de l'idée de la preuve, qu'une réelle preuve rigoureuse.

*Démonstration.* La preuve de ce lemme est très visuelle, nous la présentons donc graphiquement, sur l'exemple ci-dessus. On considère une équerre de

taille  $t$  de  $\lambda$  :



La bille associée à l'équerre choisie ( $t=6$ ) ici est  $B_4$ . On a bien  $B_4 > t$ , car  $B_4 = 8$ , et,  $B_4 - t$  n'est pas une bille. Regardons maintenant où arrive cette bille une fois qu'on a enlevé l'équerre.



On peut se convaincre que cette démarche se généralise à n'importe quel  $\lambda$ . En effet, soit une équerre de taille  $t$ . Tout d'abord, les billes différentes de celles associées à l'équerre  $t$  ne sont pas affectées par le fait d'enlever l'équerre. En effet, si la bille est 'en dehors' de l'équerre, alors, elle ne bouge pas. Si elle est 'à l'intérieur' de l'équerre, alors, on a bien

$$\lambda_i - i + s = \lambda_i - (i + 1) + 1 + s$$

. Donc, cette opération laisse inchangée les  $B_i$  différent de ceux de l'équerre. De plus le  $B_i$  associé à l'équerre se déplace à  $B_i - t$ , ce qui nous donne le sens direct du lemme ainsi que la fin de celui-ci. Pour le sens réciproque, il suffit de remarquer que l'équerre située entre les positions  $B_i - t$  et  $B_i$  est d'une part bien existante car il n'y a pas de bille en position  $B_i - t$ , donc le digramme de Young "monte" à cette position (c'est à dire que c'est une

nouvelle ligne), et il y a une bille en position  $B_i$ , donc le diagramme de Young "descend" à cette position (c'est à dire que c'est la fin d'une colonne), et est d'autre part de taille  $t$ , d'où la réciproque puis le lemme.  $\square$

**Lemme 2.16.** *Soit  $\lambda$  une partition qui est un  $n$ -cœur, pour un entier  $n$ . Alors, pour tout multiple  $m$  de  $n$ ,  $\lambda$  est un  $m$ -cœur.*

*Démonstration.* Par contraposition, si  $\lambda$  n'est pas un  $m$ -cœur, on veut montrer que  $\lambda$  n'est pas un  $n$ -cœur. Par hypothèse, et d'après le lemme 2.17 ci-dessus, il existe une bille  $b$  telle que  $b - m$  n'est pas une bille. Si  $b - n$  n'est pas une bille alors  $\lambda$  n'est pas un  $n$ -cœur et c'est bon, sinon on définit  $b_1 := b - n$  est une bille. Si  $b_1 - n = b - 2n$  n'est pas une bille alors  $\lambda$  n'est pas un  $n$ -cœur et c'est bon, sinon  $b_2 := b_1 - n = b - 2n$  est une bille. ... Par récurrence, soit  $\lambda$  n'est pas un  $n$ -cœur soit  $b - n, b - 2n, \dots, b - kn$  est une bille. Si  $m = dn$  alors pour  $k = d - 1$  on a soit  $\lambda$  n'est pas un  $n$ -cœur soit  $b - kn$  est une bille, auquel cas  $b_k := b - kn$  est une bille et  $b - m = b_k - n$  n'est pas une bille par hypothèse, donc  $\lambda$  n'est pas un  $n$ -cœur.  $\square$

Afin de mieux établir la bijection à venir, nous allons utiliser et démontrer le théorème suivant, qui nous donne une caractérisation des partitions qui sont des  $t$ -cœurs.

**Théorème 2.17.** *Soit un  $t$ -abaque associé à une partition  $\lambda$ , et soit  $n_i$  le nombre de billes dans la colonne  $i$ . Alors,  $\lambda$  est une partition  $t$ -cœur si, et seulement si,  $\forall i \in \llbracket 0, t - 1 \rrbracket$ , les  $n_i$  billes dans la colonne  $i$  sont en positions :  $(1, i), (2, i), \dots, (n_i, i)$*

*Remarque 2.18.* Comme  $\lambda$  n'a pas de partie de taille 0, la première colonne est nécessairement vide, id est  $n_0 = 0$ .

En d'autres termes, pour qu'une partition soit un  $t$ -cœur il faut que dans son  $t$ -abaque, aucune bille n'ait de trou au dessus d'elle

*Démonstration.* Cette preuve se base majoritairement sur le lemme 2.14. Soit un  $t$ -abaque associé à une partition  $\lambda$ , et soit  $n_i$  le nombre de billes dans la colonne  $i$ . Supposons que  $\lambda$  soit une partition  $t$ -cœur. D'après 2.14, il n'existe pas de  $B_i$  telle que  $B_i > t$  et  $B_i - t$  ne soit pas dans le  $t$ -abaque. Donc les billes dans la colonne  $i$  sont dans toutes les positions en haut. La réciproque et donnée aussi par le Lemme 2.14, venant du fait que celui-ci est aussi une équivalence. En effet, si dans le  $t$ -abaque il n'y a pas de saut dans les colonnes, autrement dit si dans toutes les colonnes  $i$  les  $n_i$  billes sont en positions  $(1, i), (2, i), \dots, (n_i, i)$ , il n'y a pas de nombre de bille  $B_i$  tel que  $B_i > t$  et  $B_i - t$  n'est pas une position de bille, donc d'après le lemme

précédemment évoqué, il n'y a pas d'équerre de taille  $t$ , donc la partition est un  $t$ -cœur.

□

*Remarque 2.19.* Choisir un tuple  $(n_1, \dots, n_t)$  revient donc à choisir une partition  $t$ -cœur. En conséquence, il y a une infinité de partitions qui sont des  $t$ -cœurs.

Avant de finir cette partie, citons aussi le théorème (difficile!) de Granville et Ono 4.1 qui dit que, pour  $s \geq 4$  et  $n \geq 1$ , il existe au moins une partition de  $n$  qui soit un  $s$ -cœur.

### 3 Cœurs simultanés

Dans la Section 2, on a défini les diagrammes de Young (voir en particulier l'Exemple 2.2).

Le théorème principal que l'on démontre ici est le suivant :

**Théorème 3.1.** *Soit  $s$  et  $t$  deux entiers naturels premiers entre eux. Alors le nombre de partitions qui sont  $s$  et  $t$ -cœurs est de*

$$\frac{1}{s+t} \binom{s+t}{s}$$

Pour cela, on va avoir besoin du théorème suivant, parfois appelée formule de Grassman :

**Théorème 3.2.** *Pour  $s, t \in \mathbb{N}$  premiers entre eux, le nombre de plus courts chemins de  $(0, 0)$  à  $(s, t)$  restant toujours en dessous de la diagonale est de*

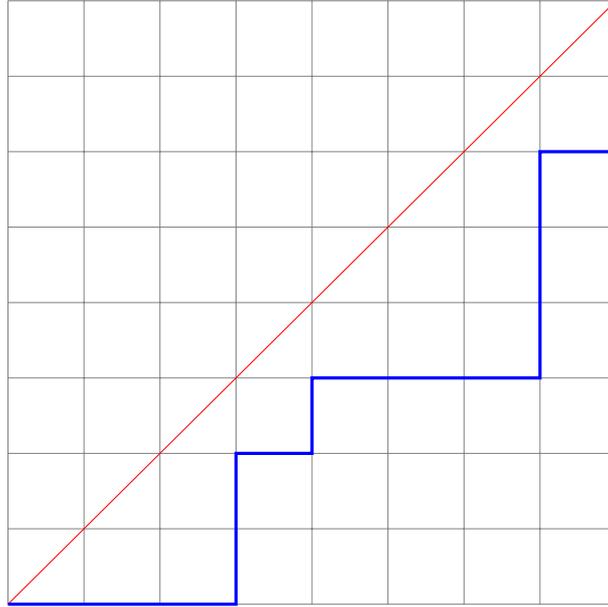
$$\frac{1}{s+t} \binom{s+t}{s}$$

Ces chemins sont appelés *chemins de Dyck*. Une variante de ce résultat est très connue pour le cas  $s = t$ , auquel cas le nombre de tels chemins est le  $t$ -ième nombre de Catalan

$$\frac{1}{t+1} \binom{2t}{t}$$

. Nous en montrons d'ailleurs un exemple ci-dessous lorsque  $s = t$

*Exemple 3.3.* Par exemple, le chemin bleu est un chemin de Dyck :



*Démonstration.* On représente un plus court chemin de  $(0,0)$  à  $(s,t)$  par un mot constitué de  $s$  lettres D (pour droite) et  $t$  lettres H (pour haut) représentant les différentes directions empruntées par le chemin. Par exemple, le chemin de l'exemple 3.3 sera noté DDDHHDHDDDDHHHDHH. Un plus court chemin de  $(0,0)$  à  $(s,t)$  est donc caractérisé par la position des  $s$  lettres D dans un mot de longueur  $s+t$ . Il y en a donc  $\binom{s+t}{s}$ .

Pour connaître le nombre de chemins de Dyck, on dénombre alors l'ensemble des chemins qui ne sont pas de Dyck. Or, un chemin est de Dyck si et seulement si dans tous les facteurs gauche du mot correspondant, il y a une proportion de D supérieure à  $\frac{s}{t+s}$ .

Il y a clairement  $\binom{s+t-1}{s}$  chemins commençant par un H (il reste à choisir l'emplacement des  $s$  D parmi  $s+t-1$  lettres restantes).

Enfin, pour dénombrer l'ensemble  $A$  des chemins qui commencent par un D et qui ne sont pas de Dyck, on procède en plusieurs étapes. On commence par associer à chaque mot un autre mot, dit mot étendu, de  $st$  lettres D et  $st$  lettres H obtenu en dupliquant  $t$  fois chaque lettre D et  $s$  fois chaque lettre H. On obtient ainsi un mot correspondant à un chemin de  $(0,0)$  à  $(st, st)$ . Les mots ainsi étendus sont de Dyck si et seulement si le mot initial l'était.

On parcourt alors les mots étendus de gauche à droite (id est on regarde successivement les préfixes par tailles croissantes) et on partitionne l'ensemble  $A$  en une partition des  $A_i$ ,  $i \in \llbracket 1, s-1 \rrbracket$  selon la différence  $i$  entre le nombre de D et de H dans le mot étendu juste avant que la première séquence de  $s$  H qui fait de H la lettre strictement dominante (dans le préfixe considéré) n'apparaisse.

Il reste à calculer le cardinal des  $A_i$ . Nous allons pour cela construire une injection  $f_i$  de  $A_i$  dans l'ensemble  $B$  des chemins étendus à partir des chemins de  $(0,0)$  à  $(s,t-1)$  (l'ensemble  $B$  contient donc des mots comportant  $st$  fois la lettre D et  $s(t-1)$  fois la lettre H). Soit  $PH^sS$  un mot (étendu) de  $A_i$  où  $P$  est un préfixe dont tous les facteurs gauche contiennent plus (au sens large) de D que de H et tel que  $PH^s$  contienne strictement plus de H que de D. On associe à un tel mot le mot  $SP$ . Cette association définit clairement une fonction  $f_i$  de  $A_i$  dans  $B$ . Montrons que  $f_i$  est injective. Soit  $PH^sS$  et  $P'H^sS'$  dans  $A_i$  comme précédemment et tels que  $SP = S'P'$ . Par exemple, supposons que  $P$  est plus grand que  $P'$  : on a  $P=P''P'$ . En comptant la différence du nombre de D et de H, on s'aperçoit que  $P''$  doit comporter autant de D que de H. Or le nombre de D dans  $P''$  est un multiple de  $t$ , et le nombre de H est un multiple de  $s$ . Ainsi le nombre de D dans  $P''$  est un multiple de  $s$  et de  $t$ , donc de  $st$  car  $s$  et  $t$  sont premiers entre eux : de même pour le nombre de H dans  $P''$ .  $P''$  contient donc un multiple de  $2st$  lettres. Or le nombre de lettres dans  $P''$  est strictement inférieur à  $2st$ . Il s'ensuit que  $P''$  est vide, donc  $P=P'$ . L'injectivité de  $f_i$  en découle immédiatement.

Par ailleurs, un mot  $M \in B$  est dans  $f_i(A_i)$  si et seulement si en parcourant le mot de droite à gauche, au (premier) moment où il y a  $i$  lettres D de plus que de H, le suffixe parcouru correspond à un mot étendu, c'est à dire que le nombre de D (respectivement H) consécutifs est toujours un multiple de  $t$  (respectivement  $s$ ) : il y en a donc  $\frac{1}{t} \binom{s+t-1}{s}$  ( $t$  fois moins que des mots de  $B$  car seul un mot sur  $t$  de  $B$  vérifie la propriété précédente). Ainsi, on a  $\#A_i = \frac{1}{t} \binom{s+t-1}{s}$ .

On obtient donc la formule, en notant  $C_{s,t}$  le nombre de chemins de Dyck de  $(0,0)$  à  $(s,t)$  :

$$C_{s,t} = \binom{s+t}{s} - \binom{s+t-1}{s} - \frac{s-1}{t} \binom{s+t-1}{s}$$

Soit :

$$C_{s,t} = \frac{1}{s+t} \binom{s+t}{s}$$

, ce qui achève la preuve. □

**Lemme 3.4.** *Soit  $s$  et  $t_2$  deux entiers premiers entre eux et supérieurs à 2. Alors il existe un nombre fini de partitions d'entiers qui sont  $s$  et  $t_2$ -cœurs*

*Démonstration.* Soit  $s, t \in \mathbb{N}$  premiers entre eux. Tout d'abord, si on a une partition  $\lambda$  qui est un  $s$ -cœur, et qui possède des billes dans la première colonne de son  $s$ -abaque, alors d'après le Lemme 2.17, elle possède une bille en position  $(1,0)$ . Cela implique que  $\lambda$  ait une partie de taille 0, ce qui est absurde car on a supposé tout les  $\lambda_i$  strictement positifs. De ce fait, pour une partition qui est un  $s$ -cœur, il n'y a pas de bille dans la première colonne.

Soit  $n, m \in \mathbb{N}$ . Supposons que  $ns + mt$  soit une valeur de bille. Alors, d'après 2.17, appliqué au  $t$ -abaque  $ns$  en est une aussi, donc il y a une bille dans la première colonne du  $s$ -abaque, ce qui est absurde. Donc, les éléments de  $\{ns + mt, n, m \in \mathbb{N}\}$  ne peuvent pas être des valeurs de bille. On en déduit donc que l'ensemble des valeurs qui peuvent être prises par les billes sont :

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid n = us + vt \text{ implique } u \text{ ou } v \text{ est strictement négatif}\} \cap \mathbb{N}^*$$

Soit  $x \in A$ .  $s$  et  $t$  sont premiers entre eux, donc d'après le théorème de Bézout,  $\exists(u, v) \in \mathbb{Z}$  tels que  $x = us + vt$ . Alors  $\forall k \in \mathbb{Z}$ ,  $x = (u - kt)s + (v + ks)t$ . On peut donc supposer, sans perte de généralité,  $u \in \llbracket 1, t - 1 \rrbracket$  et  $v < 0$ . De même, on peut prendre  $v \in \llbracket -(s - 1), -1 \rrbracket$ . Donc  $x$  s'écrit de manière unique comme  $us - vt$ , avec  $u \in \llbracket 1, t - 1 \rrbracket$  et  $v \in \llbracket 1, s - 1 \rrbracket$ . Donc

$$A = \{us - vt > 0, u \in \llbracket 1, t - 1 \rrbracket, v \in \llbracket 1, s - 1 \rrbracket\}$$

qui est fini de cardinal inférieur à  $(s - 1)(t - 1)$ . □

On a aussi le lemme suivant :

**Lemme 3.5.** *Contrairement au lemme ci-dessus, si  $s$  et  $t$  ne sont pas premiers entre eux, il existe une infinité de partitions qui sont  $s$  et  $t$ -cœurs.*

*Démonstration.* Supposons  $s$  et  $t$  non premiers entre eux, et soit donc  $d$  un diviseur commun à  $s$  et  $t$ . Donc, il existe une infinité de  $d$ -cœurs car  $d > 1$ . D'après 2.16 ces cœurs sont aussi des  $(s, t)$ -cœurs, donc, on en a bien une infinité. □

On considère maintenant

$$A' = \{us - vt, u \in \llbracket 1, t - 1 \rrbracket, v \in \llbracket 1, s - 1 \rrbracket\}$$

. On constate que  $A \subset A'$ . Si on prend  $x = us - vt \in A'$ , alors,  $-x = (t - u)s - (s - v)t \in A'$ . On en déduit que  $A' = A \cup -A$ , puis que

$$|A| = \frac{(s - 1)(t - 1)}{2}$$

**Corollaire 3.6.** *On a donc peut aussi dire que le nombre de partitions qui sont  $s$  et  $t$ -cœurs est fini et est inférieur à*

$$2^{\frac{(s-1)(t-1)}{2}} = \#\mathcal{P}(A)$$

*Démonstration.* L'application qui à une partition  $s$  et  $t$ -cœurs associe l'ensemble de ses positions de bille est injective et est à valeur dans  $\mathcal{P}(A)$ , d'où le résultat. □

On va ensuite poser les éléments de  $A'$  sur  $\llbracket 0, t - 2 \rrbracket \times \llbracket 0, s - 2 \rrbracket$ . Soit

$$f : \llbracket 0, t - 2 \rrbracket \times \llbracket 0, s - 2 \rrbracket \rightarrow \mathbb{Z}$$

$$(i, j) \mapsto M - it - js$$

où  $M = st - s - t$ . L'utilité d'avoir un tel  $M$  se verra sur les dessins, on y verra apparaître une symétrie que l'on n'obtiendrait pas sans cela. Voici un exemple pour  $s=6$  et  $t=11$  :

*Exemple 3.7.*

	5	-1	-7	-13	-19	-25	-31	-37	-43	-49	(10, 5)
	16	10	4	-2	-8	-14	-20	-26	-32	-38	
	27	21	15	9	3	-3	-9	-15	-21	-27	
	38	32	26	20	14	8	2	-4	-10	-16	
(0, 0)	49	43	37	31	25	19	13	7	1	-5	

*Remarque 3.8.* Comme, dans le  $t$ -abaque (respectivement  $s$ -abaque), d'après 2.17, les billes dans les colonnes commencent dans la première ligne et descendent, en ajoutant à chaque fois  $t$  (respectivement  $s$ ), on peut commencer à voir arriver la bijection entre les chemins de Dyck et les partitions  $s$  et  $t$ -cœurs. L'illustration suivante peut peut-être aider à comprendre d'où vient cette bijection :

	5	-1	-7	-13	-19	-25	-31	-37	-43	-49	(10, 5)
	16	10	4	-2	-8	-14	-20	-26	-32	-38	
	27	21	15	9	3	-3	-9	-15	-21	-27	
	38	32	26	20	14	8	2	-4	-10	-16	
(0, 0)	49	43	37	31	25	19	13	7	1	-5	

Les éléments de  $S$  sont ici en dessous de la barre en rouge. On voit ici que rester en dessous de la diagonale avec un chemin est équivalent à considérer une suite de billes qui sont toutes de valeurs positives, donc qui peuvent être placées dans les  $s$  et  $t$ -abaques

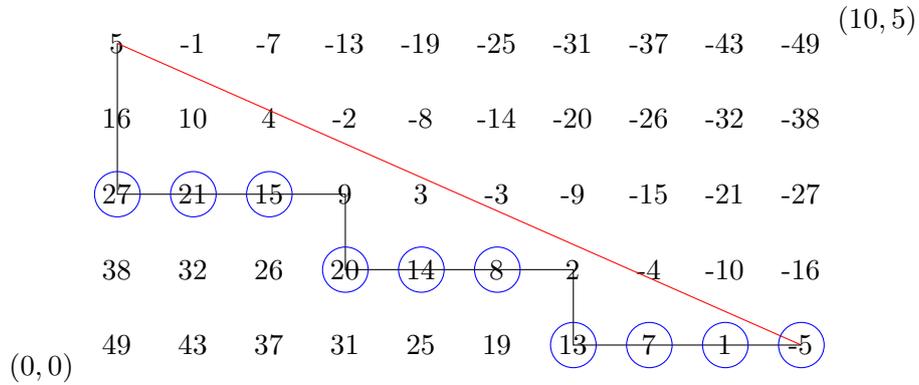
On définit ensuite  $S$  comme l'ensemble des points dans  $\llbracket 0, t \rrbracket \times \llbracket 0, s \rrbracket$  qui sont en-dessous de la diagonale. On a donc

$$S = \{(i, j) \in \mathbb{Z}^2, i \in \llbracket 0, t \rrbracket, j \in \llbracket 0, \lfloor \frac{st - it}{2} \rrbracket \rrbracket\}$$

On va expliciter la bijection évoquée :

**Théorème 3.9.** *Il y a une bijection entre les chemins dans  $S$ , ie les chemins de Dyck entre  $(0, s)$  et  $(t, 0)$  et les partitions qui sont  $s$  et  $t$ -cœurs*

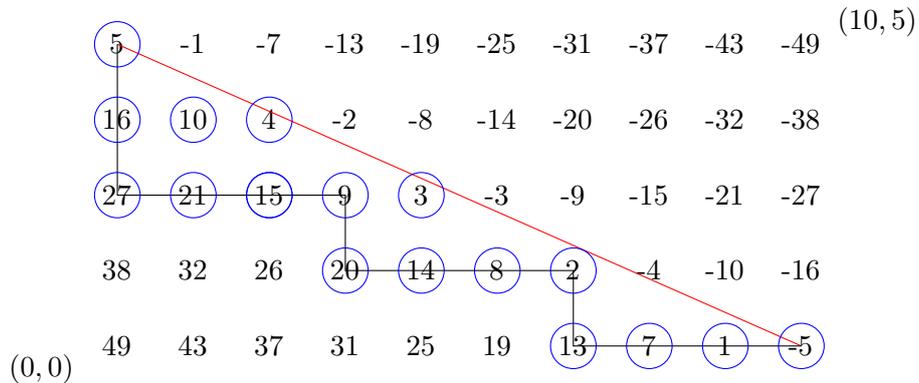
*Démonstration.* Soit  $P$  un chemin de  $(t, 0)$  à  $(0, s)$  qui reste dans  $S$ . On définit les points  $j_0, j_1, \dots, j_s$  comme les points tels que  $\forall i \in \llbracket 0, s \rrbracket, (i, j_i)$  est le point le plus bas du chemin  $P$  sur la colonne  $i$ . Par exemple, ils sont représentés ici :



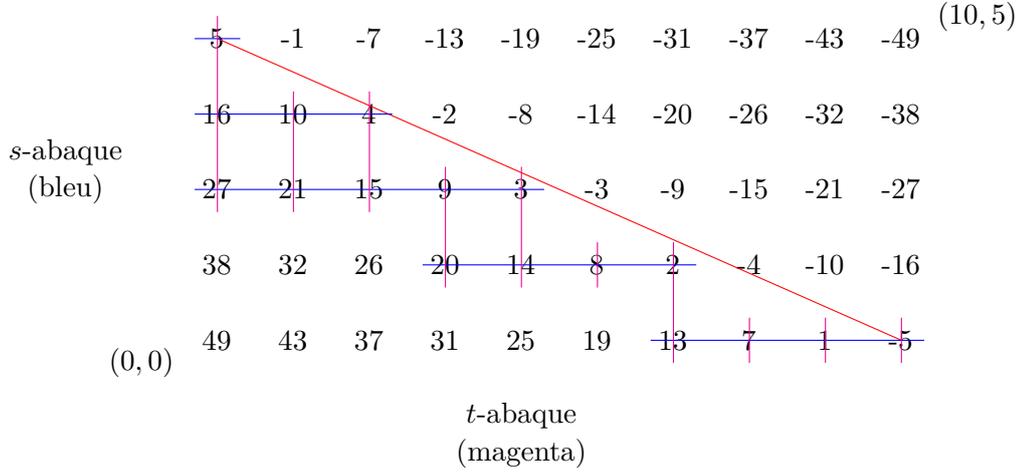
On voit ici que  $(i + 1, j_i) \in S$  car  $(i + 1, j_i) \in P$ . On a donc  $0 \leq j_i \leq \lfloor \frac{st - (i+1)t}{s} \rfloor$ . Donc  $f(i, j_i)$  est ou bien positif ou bien la première valeur négative dans la colonne  $i$ . Soit

$$X = \{f(i, j_i), i \in \llbracket 0, s - 2 \rrbracket, j \in \llbracket j_i, t \rrbracket\} \cap A$$

Regardons ce à quoi ressemble  $X$  :



Si  $X = \emptyset$ ,  $X$  est la partition vide, qui est  $s$  et  $t$ -cœur. Sinon, si  $X \neq \emptyset$ , on remarque que le placement des billes de  $X$  correspond à un  $s$  et  $t$ -cœur d'après 2.17 et 2.11. On voit les  $s$  et  $t$ -cœurs comme suivant :



Si  $f(i, j_i)$  est négatif, alors  $f(i, j_i)$  est la première valeur négative dans la colonne  $i$ , car il y a une seule valeur négative par colonne qui est dans  $S$  (c'est d'ailleurs pour cette raison que  $S$  a été construit ainsi). Si  $f(i, j_i)$  est positif, alors  $X$  contient tout les éléments  $\in \llbracket 0, f(i, j_i) \rrbracket$  qui sont congrus à  $f(i, j_i)$  modulo  $s$  et  $t$ . Ainsi un chemin  $P$  correspond à un ensemble  $X$ , distinct pour chaque  $P$ , donc à une partition  $s$  et  $t$ -cœur, d'après 2.11.

Réciproquement, considérons une partition  $s$  et  $t$ -cœur, c'est-à-dire un ensemble de billes, d'après 2.11. Alors,  $\forall i \in \llbracket 0, t-2 \rrbracket$ , soit  $(i, j_i)$  l'élément le plus bas de la colonne  $i$  qui soit un nombre de billes. Si il n'y en a pas, on prend  $j_i$  comme le plus petit entier tel que  $f(i, j_i) < 0$ . Comme ci-dessus, on a donc  $j_i \leq \lfloor \frac{st-(i+1)t}{s} \rfloor$ . On crée donc un chemin de la sorte, noté  $P$  :

$$(0, s) - (0, j_0) - (1, j_1) - (1, j_1) - (2, j_2) \cdots (t-2, j_{t-2}) - (t-1, j_{t-2}) - (t-1, 0) - (t, 0)$$

. Cela est un plus court chemin si, et seulement si,  $j_0 \geq j_1 \geq \cdots \geq j_{t-3} \geq j_{t-2} \geq 0$ . Or, on a vu que les valeurs de billes étaient forcément dans  $A$ . Donc on a bien les inégalités voulues (cela se voit bien graphiquement). Pour conclure que le chemin qu'on a bien donné est dans  $S$ , il suffit de montrer que  $j \leq \lfloor \frac{st-it}{s} \rfloor$ ,  $\forall (i, j) \in P$ . Pour  $i = 0, t$ , cela est trivialement vrai. Pour  $i \in \llbracket 1, t-1 \rrbracket$ , on a

$$j \leq j_{i-1} \leq \lfloor \frac{st - (i-1+1)t}{s} \rfloor = \lfloor \frac{st-it}{s} \rfloor$$

Donc  $P$  est bien un chemin de Dyck. La remarque 2.11 nous dit que chacun des tels  $P$  est distinct pour une partition  $s$  et  $t$ -cœur différente, d'où la bijection recherchée. □

Enfin, le théorème 3.1 est une combinaison de 3.9 et de 3.2. On en déduit donc l'énoncé du théorème 3.1 :

Le nombre de partitions qui sont à la fois  $s$  et  $t$ -cœurs est de

$$\frac{1}{s+t} \binom{s+t}{s}$$

## 4 Applications et résultats généraux

En 1996, Granville et Ono ont démontré le théorème suivant, dont 2.17 et le point de départ :

**Théorème 4.1.** *Soit  $s \geq 4$ . Pour chaque  $n \geq 1$ , il existe (au moins) une partition de  $n$  qui soit un  $s$ -cœur.*

*Démonstration.* Comme plusieurs théorèmes de cette partie, nous n'allons pas donner une preuve, mais plus une idée de la preuve. La preuve, dans le cas général, utilise le théorème des quatre carrés de Lagrange ainsi que la théorie des formes modulaires. Les idées que nous donnons ici viennent de [KI] et ne servent que dans le cas  $t \geq 11$  et  $t$  premier. On ne s'intéresse qu'à  $t$  premier grâce à 2.16. Tout d'abord, Granville et Ono démontrent que ce théorème est vrai si, et seulement si, le système

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^{t-1} \frac{tx_k^2}{2} + kx_k = n \\ \sum_{k=0}^{t-1} x_k = 0 \end{cases}$$

a une solution vectorielle entière  $(x_0, x_1, \dots, x_{t-1}) \in \mathbb{Z}^t$ . Pour être plus exact, ils démontrent que le nombre de solutions entières de ce système est le nombre de partitions  $t$ -cœurs de  $n$ . La preuve est ensuite divisée en deux parties, un pour les  $n$  'grands', et un autre pour les  $n$  'petits'. Le cas  $n$  'petit', c'est-à-dire tel que  $n \leq t(t^2 - 1)/4 + (t - 1)$ , peut être traité avec des arguments computationnels. Dans le cas où  $n \geq t(t^2 - 1)/4 + (t - 1)$ , on pose la division euclidienne de  $n$  par  $t$  :

$$n = tm + r'$$

, avec donc  $m \geq (t^2 - 1)/4$ . Modulo plusieurs manipulations, et le fait de regarder  $m$  et  $r$  modulo 4, on peut se ramener au cas où  $4m - r^2$  est impair, positif, et distinct de 7 modulo 8. De plus, on peut aussi se ramener

à  $m = r = 1[2]$ . Donc,  $4m - r^2$  n'est ni de la forme  $4k$ , ni de la forme  $8k + 7$ , donc, d'après le théorème des 3 carrés de Legendre, on peut écrire  $4m - r^2 = a^2 + b^2 + c^2$ , et finalement, on peut écrire les  $x_i$  en fonction de  $a, b, c$  afin de donner le système voulu. □

On dispose aussi des fonctions génératrices des partitions et des  $t$ -cœurs : Soit  $S$  la série formelle suivante :

$$S(X) = \sum_{n=0}^{\infty} p(n)X^n$$

*Remarque 4.2.* Alors, on a, grâce à 1.5, que le rayon de convergence d'une telle série est de 1.

De plus, on a le théorème suivant, qui nous vient, comme bien souvent, de Euler :

**Théorème 4.3.**

$$S(X) = \prod_{k \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{1 - X^k} = \prod_{k \in \mathbb{N}} \sum_{m \in \mathbb{N}} X^{km}$$

*Démonstration.* Tout d'abord, remarquons que ce produit est bien défini (en tant que série formelle). En effet, le coefficient devant  $X^n$  est

$$\#\{\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^n k\alpha_k = n\} = p(n)$$

. Cette égalité de cardinaux est vraie car  $\alpha_k$  compte le nombre de parties de tailles  $k$  dans la partition de  $n$ . Par exemple, pour la partition  $(5, 3, 3, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1)$ , on a :  $\alpha_1 = 6, \alpha_2 = 3, \alpha_3 = 2, \alpha_4 = 0, \alpha_5 = 1$ , et  $\forall i \geq 6, \alpha_i = 0$ . Donc, tout les coefficients sont finis, et on a bien l'égalité ci-dessus. □

Maintenant, on dispose aussi de fonctions génératrices pour les partitions qui sont  $t$ -cœurs. En effet, dénotons  $c_t(n)$  le nombre de partitions de  $n$  qui sont  $t$ -cœurs. Alors, on a, ce qui, selon les dires du mathématicien britannique Hardy, serait "l'identité la plus belle de Ramanujan" (selon [CKNS]) :

**Théorème 4.4.**

$$F(X) = \sum_{n=0}^{\infty} c_t(n)X^n = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{(1 - X^{kt})^t}{1 - X^k}$$

*Remarque 4.5.* Nous ne l'utiliserons pas ici, mais la formule de Cauchy qui donne

$$c_t(n) = \int_C \frac{F(z)}{z^{n+1}} dz$$

est utile afin d'estimer  $c_t(n)$ , et est utilisée par exemple dans [An2]

Nous ne donnerons ici que l'idée de cette preuve, et non toute la preuve. Pour prouver cela, nous aurons besoin de la notion de  $t$ -quotient et de  $t$ -cœur d'une partition.

**Définition 4.6.** Soit une partition  $\lambda = (\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_s > 0)$ , et soit  $t \in \mathbb{N}^*$ . On a vu dans 2.14 que l'on pouvait transformer  $\lambda$  en une partition  $t$ -cœur en enlevant successivement les équerres dont la taille est divisible par  $t$ . On peut voir que l'ordre dans lequel on enlève ces équerres n'est pas important. On définit donc  $\lambda^{(t)}$  comme le  $t$ -cœur de  $\lambda$ , c'est-à-dire  $\lambda$ , duquel on a enlevé toutes les équerres dont la taille est divisible par  $t$ .

A présent, le  $t$ -quotient d'une partition :

**Définition 4.7.** Soit une partition  $\lambda = (\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_s > 0)$ , et soit  $t \in \mathbb{N}^*$ . On définit le  $t$ -quotient de  $\lambda$  comme étant le tuple  $(\lambda_{(0)}, \lambda_{(1)}, \dots, \lambda_{(t-1)})$  où  $\lambda_{(i)}$  est défini comme étant la partition où la  $j$ -ème partie est le nombre d'espaces vides au dessus de l'élément  $(i, j)$  dans le  $t$ -abaque, pour  $j$  plus petit que la ligne de la dernière bille de la colonne  $i$ .

*Exemple 4.8.* La partition associée au 6-abaque suivant :

	0	1	2	3	4	5
0	$B_8$	×	×	×	×	$B_7$
1	$B_6$	×	$B_5$	$B_4$	$B_3$	
2		$B_2$			$B_1$	
...						

a pour 6-quotient

$$(\emptyset, (2), (1), (1), (1, 1), \emptyset)$$

*Remarque 4.9.* Par définition  $\sum_{i=0}^{t-1} |\lambda_{(i)}|$  est le nombre de  $t$ -équerres qu'on a enlevé pour faire le  $t$ -cœur de  $\lambda$

*Remarque 4.10.* La donnée d'une partition est équivalente à la donnée de son  $t$ -cœur et de son  $t$ -quotient. Cela est démontré rigoureusement dans 2.7.30 de [JK], mais peut se voir sur l'abaque. En effet, d'après 2.11, si on se donne un abaque rempli, c'est-à-dire une partition, afin de trouver son  $t$ -cœur, on va glisser les billes vers le haut, comme dans 2.14, jusqu'à ce que toutes les billes soient en haut de l'abaque, et que donc ce soit un  $t$ -cœur, d'après 2.17. Se donner une partition est donc se donner un abaque, et, dans chaque colonne de l'abaque, on regarde combien il y a de trous au dessus de la bille la plus en bas, qu'on enlève jusqu'à avoir son  $t$ -cœur. Les billes

enlevées progressivement seront 'stockées' dans le  $t$ -quotient, et on sera donc capable de remonter du  $t$ -cœur à la partition avec le  $t$ -quotient.

*Démonstration.* Nous ne donnerons ici que l'idée de cette preuve, et non toute la preuve. D'après 4.10, on dispose d'une bijection entre les partitions de  $n$  et les couples ( $t$ -cœur,  $t$ -quotient). Comme rajouter une bille revient à enlever  $t$  éléments dans le  $t$ -abaque, on peut dire (ceci est sans preuve), qu'on a une bijection (voir : [GKS] )

$$\begin{aligned}\phi : P &\longrightarrow P_{t\text{-cœur}} \times P^t \\ \lambda &\longmapsto (\lambda_{t\text{-cœur}}, \lambda_{(0)}, \dots, \lambda_{(t-1)})\end{aligned}$$

, et ce en notant  $P$  l'ensemble de toutes les partitions, telle que

$$|\lambda| = |\lambda_{t\text{-cœur}}| + t \sum_{k=0}^{t-1} |\lambda_{(k)}|$$

De cela, on déduit l'égalité suivante entre les séries génératrices :

$$S(X) = S(X^t)^t \sum_{n=0}^{\infty} c_t(n) X^n$$

En combinant cela avec 4.3, on trouve que

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_t(n) X^n = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{(1 - X^{kt})^t}{1 - X^k} = \frac{(X^t, X^t)_{\infty}^t}{(X, X)_{\infty}}$$

□

## 5 Problèmes encore ouverts

Aujourd'hui, la forme que prend est toujours inconnue  $c_t(n)$ . Dans [An2], il est dit qu'il reste la conjecture suivante :

**Conjecture 5.1.** *Pour  $n \geq t + 1$ ,  $c_t(n) \leq c_{t+1}(n)$*

D'après [CKNS], cette conjecture est encore ouverte en 2021, mais, dans [An2] J. Anderson démontre cela pour  $n$  assez grand seulement.

On a aussi cette conjecture, de [HN], qui dit que

**Conjecture 5.2.** *Soit  $t \geq 9$  ou  $t = 6, 8$ . Alors,*

$$\forall n \geq 20, (\text{resp. } n \geq 56, \text{ si } t \text{ est impair (resp. pair)}), sc_{t+2}(n) \geq sc_t(n)$$

où  $sc_t(n)$  est le nombre de partition de  $n$  qui sont  $t$ -cœurs et égales à leur conjugué.

## Références

- [An] J. ANDERSON, *Partitions wich are simultaneously  $t_1$ - and  $t_2$ -core.* Discrete Mathematics **248** (2002) 237–243.
- [JK] G. JAMES, A. KERBER *The Representation Theory of the Symmetric Group*, Addison-Wesley Publishing Co., Reading, MA, 1981
- [CKNS] H. CHO, B. KIM, H NAM, J. SOHN *A survey on  $t$ -core partitions* Hardy-Ramanujan Journal **44** (2021) 81-101
- [KI] I. KIMING *A note on a theorem of A. Granville and K. Ono*
- [GKS] F. GARVAN, D. KIM, D. STANTON *Cranks and  $t$ -cores.* Mathematics Subject Classification 1991
- [Ma] A. MATHAS *Iwahori-Hecke algebras and Schur algebras of the symmetric group. University Lecture Series*, American Mathematical Society, Providence, RI, 1999. xiv+188
- [An2] J. ANDERSON, *An asymptotic formula for the  $t$ -core partition function and a conjecture of Stanton*
- [HN] C. R. H. HANUSA and R. NATH, *The number of self-conjugate core partitions*, J. Number Theory 133 (2013), no. 2, 751–768. MR 2994385