

Groupes d'homotopie des sphères

Maxence MICHOT

Juin 2023

Résumé

Dans ce rapport, on va se poser des questions en rapport avec la topologie algébrique, la plus importante sans doute étant : Comment savoir si deux espaces topologiques donnés sont homéomorphes ? Pour cela, nous construirons des objets, ici des groupes, qui nous donneront des informations sur si ces espaces sont homéomorphes ou non. Plus précisément, nous construirons des foncteurs de la catégorie des espaces topologiques vers celle des groupes (abéliens).

Table des matières

1	Introduction	1
2	Homotopie, type d'homotopie	2
3	Groupe fondamental et revêtements	3
4	Applications	10
5	Un peu d'homologie et de cohomologie	14
6	Les groupes d'homotopie	17
7	Calcul d'autres groupes d'homotopie d'espaces	22
A	Topologie générale	28
B	Un peu de théorie des catégories	30

1 Introduction

Tout le long de cet exposé, nous prendrons X et Y des espaces topologiques. Toutes les fonctions considérées, si ce n'est précisé autrement, seront continues. Le but de la topologie algébrique est de donner des invariants topologiques, qui permettent de distinguer des espaces homéomorphes. On peut tout d'abord se demander si des espaces comme $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ sont homéomorphes. Or, le premier privé d'un point n'est pas connexe, alors que le second privé d'un point l'est. La connexité a donc suffi pour départager ces deux espaces. Cependant, est-ce que S^2 et $\mathbb{R}P^2$ sont homéomorphes ? C'est une question compliquée à répondre sans outils précis. Cependant, S^2 a un groupe fondamental trivial, ce qui n'est pas le cas de $\mathbb{R}P^2$, comme on le verra plus tard, ce qui pourra nous dire que ces deux espaces ne sont en fait pas homéomorphes. J'ai aussi muni cet exposé de deux annexes : une qui rappelle des notions de topologie générale, l'autre qui expose rapidement les quelques notions de théorie des catégories nécessaires.

2 Homotopie, type d'homotopie

Commençons par quelques définitions :

Définition 2.1. Un **chemin** est une fonction continue $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$

Définition 2.2. Un **lacet** est un chemin tel que $\gamma(0) = \gamma(1)$

Comme S^1 n'est, topologiquement parlant, que $[0, 1]/(0 \sim 1)$ (voir A.1), on peut aussi dire qu'un lacet est une application $S^1 \rightarrow X$. Cette définition a ses utilités que nous verrons lorsque nous parlerons de groupes d'homotopie supérieurs.

Définition 2.3. Soit $f, g : X \rightarrow Y$ deux fonctions continues. On dit que f et g sont **homotopes** si il existe une fonction

$$H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$$

, telle que $H(-, 0) = f$ et $H(-, 1) = g$, et on note parfois $f \cong g$

Proposition 2.4. La relation d'homotopie est une relation d'équivalence

Démonstration. La réflexivité est évidente. La symétrie s'observe en remplaçant t par $1 - t$ dans l'homotopie. Si on a $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow Z$, $h : Z \rightarrow A$, et H une homotopie de f à g , et H' de g à h , alors on définit

$$H'' : (x, t) \mapsto \begin{cases} H(x, 2t) & \text{si } t \leq \frac{1}{2} \\ H'(x, 2t - 1) & \text{sinon} \end{cases}$$

qui est bien une homotopie entre f et h , ce qui nous donne la transitivité. □

On commencera par des cas plus simples, où l'on verra tout d'abord, par exemple, des homotopies de lacet, c'est-à-dire des homotopies entre deux lacets, qui fixent un point du cercle.

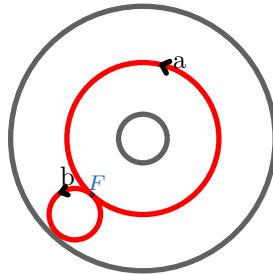
Exemple 2.5. Dans $\mathbb{R}^2$, n'importe quels deux chemins sont homotopes. En fait, par la transitivité de la relation d'homotopie (2.4), il suffit de montrer que n'importe quel chemin est homotope à un chemin constant. Si on a un chemin γ , il suffit de prendre pour homotopie

$$H : (x, t) \mapsto t\gamma(x)$$

Définition 2.6. Soit γ_1 et γ_2 des lacets. Une homotopie de lacets entre γ_1 et γ_2 est une homotopie H telle que pour tout $t \in [0, 1]$, $H(0, t) = H(1, t) = \gamma_1(0) = \gamma_2(0)$

Remarque 2.7. En fait, cela reste vrai si on se place dans n'importe quel convexe C , en utilisant une homotopie barycentrique

Exemple 2.8. Dans la figure suivante

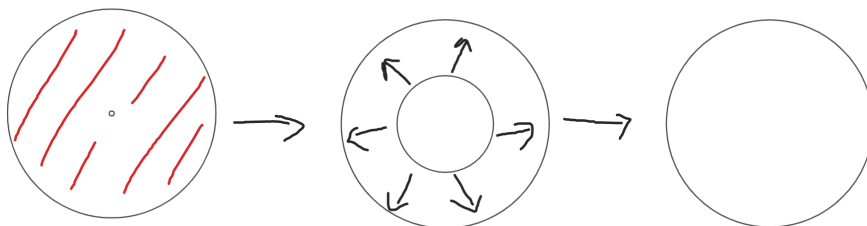


les 2 lacets, basés au point F , a et b ne sont pas homotopes. En effet, dans la couronne, il semble (intuitivement pour le moment) impossible de transformer le lacet a en lacet b continuellement. En revanche, a et b sont homotopes en tant que chemins. En effet, si F n'est pas fixé et qu'on voit a et b comme des applications partant de $[0, 1]$, on voit qu'on peut changer a en b .

On voit que si on fixe un point ou non, on a deux réponses différentes à la question : 'est ce que a et b sont homotopes?'. Cela motive donc la définition suivante :

Définition 2.9. Une homotopie relative à un sous espace $A \subset X$ est une homotopie qui fixe A , et ce pour tout $t \in [0, 1]$

Exemple 2.10. On voit sur cette image :



$id_{D^2 - \{0\}}$ et la projection de celui-ci sur S^1 sont homotopes relativement à S^1 . On appelle ce genre de fonction une rétraction :

Définition 2.11. Etant donné deux espaces A et X et une application "d'inclusion" $i : A \hookrightarrow X$, une **rétraction** $r : X \mapsto A$ est une application telle que $r \circ i = id_A$

Remarque 2.12. On peut se dire que cette notion est un peu "duale" de celle de section vue en théorie des groupes.

Définition 2.13. Deux espaces X et Y ont le même type d'homotopie si il existe une équivalence d'homotopie entre X et Y

Autrement dit, deux espaces ont le même type d'homotopie si ils sont isomorphes dans **hTop**

Exemple 2.14. Par exemple, S^1 et $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ ont le même type d'homotopie. En notant i l'inclusion $S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ et p la projection évidente $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow S^1$, On a donc alors $p \circ i = id_{S^1}$ et $H : (t, x) \mapsto tx + (1 - t) \frac{x}{\|x\|}$, ce qui nous donne une homotopie entre $id_{\mathbb{R}^2 - \{0\}}$ et $i \circ p$

Remarque 2.15. Deux espaces homéomorphes ont le même type d'homotopie

3 Groupe fondamental et revêtements

Maintenant, on aimerai bien définir un invariant topologique (B.12) qui nous permette de distinguer différents espaces. Pour cela, on se sert de l'intuition suivante. Si deux espaces sont 'les mêmes' (comprendre homéomorphes), alors, les lacets que je trace sur l'un sont les mêmes que les lacets que je trace sur le second. On définit donc :

Définition 3.1. Soit X un espace topologique, et $x_0 \in X$. On note $(\Omega X, x_0)$ l'espace des lacets de X basés en x_0

Remarque 3.2. Ω est un foncteur, on s'en servira dans la toute dernière partie.

Or, cet espace, qui peut être utile parfois, comme dans 3.23, a plusieurs défauts : il a trop d'éléments, ce n'est pas un groupe. Il est cependant possible de munir cet ensemble d'une topologie 'naturelle' qui rende cette construction fonctorielle. Dans ce cas, on dit que c'est un A_∞ espace. Ici, pour avoir des objets plus simples, on va noter $\sim$ la relation d'homotopie, puis quotienter :

Définition 3.3. On appelle **groupe fondamental** l'ensemble $\pi_1(X, x_0) := \Omega X / \sim$

Cette définition nous donne bien un ensemble d'après 2.4. Pour un lacet γ , on note $[\gamma]$ sa classe dans le groupe fondamental. On y ajoute la loi interne suivante :

$$\cdot : \pi_1(X, x_0)^2 \rightarrow \pi_1(X, x_0)$$

$$([\gamma], [\beta]) \mapsto \left[t \mapsto \begin{cases} \gamma(2t) & \text{si } t \leq \frac{1}{2} \\ \beta(2t-1) & \text{sinon} \end{cases} \right]$$

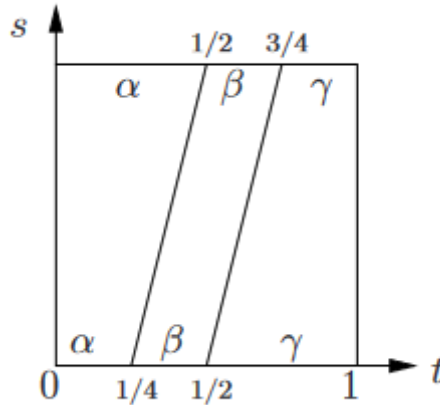
Les propriétés d'homotopie nous donnent que cette application est bien définie. En effet, si deux lacets sont homotopes, alors ces deux lacets, parcourus à n'importe quelle vitesse, sont encore homotopes. Il est à noter que cette loi n'est pas celle de la composition usuelle de fonctions.

Théorème 3.4. $(\pi_1(X, x_0), \cdot)$ est un groupe

Démonstration. Notons c_{x_0} la classe de l'application constante en x_0 . Alors, pour tout élément $[\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$, $[\gamma] \cdot c_{x_0} \cong [\gamma]$, et de même pour $c_{x_0} \cdot [\gamma]$. Notons ensuite $[\gamma]^{-1} := [t \mapsto \gamma(1-t)]$. L'homotopie

$$H : (x, t) \mapsto \left[x \mapsto \begin{cases} \gamma(2xt) & \text{si } x \leq \frac{1}{2} \\ \gamma((2-2x)t) & \text{sinon} \end{cases} \right]$$

nous donne $[\gamma] \cdot [\gamma]^{-1} \cong c_{x_0}$. On a de même $[\gamma]^{-1} \cdot [\gamma] \cong c_{x_0}$. Il nous reste la partie la plus délicate, c'est-à-dire l'associativité de $\cdot$. Celle-ci est possible à la main, et est faite dans [Pa]. Nous nous contenterons ici d'une preuve visuelle, venant aussi de [Pa] :



qui nous donne une homotopie entre $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$ et $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$ □

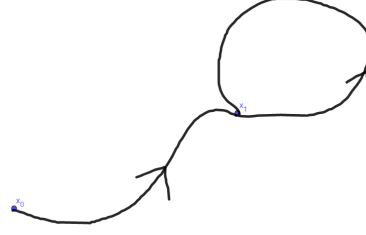
Quand le groupe fondamental est trivial, on dit que l'espace est **simplement connexe**. On peut à présent se demander : y'a t'il une réelle utilité à inclure x_0 dans cette définition ? En d'autres termes, est-ce que la définition dépend du point base. Il se trouve que, dans le cas où X est connexe par arcs, cette définition ne dépend pas de x_0 .

Lemme 3.5. Soit X un espace connexe par arcs, et $x_0, x_1 \in X$. Alors $\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(X, x_1)$

Démonstration. Soit γ un chemin de x_0 à x_1 . Comme vu dans l'image ci-dessous, l'application

$$f : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_1)$$

$$[\beta] \mapsto [\gamma] \cdot [\beta] \cdot [\gamma]^{-1}$$



est un isomorphisme de groupe. $\square$

Comme, si X n'est pas connexe par arcs, on peut se ramener à l'étude de chaque composante connexe par arcs, on omettra souvent le x_0 dans $\pi_1(X, x_0)$. Ce qui se trouve ensuite est sans doute la propriété la plus importante du groupe fondamental : c'est un foncteur (voir B.11). Pour cela, nous avons besoin de la définition-proposition suivante :

Définition 3.6. Soit $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ une fonction continue. Alors, on dispose d'un **morphisme induit** $f_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$

Démonstration. Soit γ, β deux lacets basés en x_0 homotopes, et soit H l'homotopie. Alors, il est clair que $H' = f \circ H$ est une homotopie entre $f \circ \gamma$ et $f \circ \beta$ $\square$

Proposition 3.7. On a l'isomorphisme suivant :

$$\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \simeq \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$$

Démonstration. la fonction

$$f : \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \rightarrow \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$$

$$[\gamma] = [(\gamma_0, \gamma_1)] \mapsto ([\gamma_0], [\gamma_1])$$

est bien définie : Soit γ et γ' homotopes à valeur dans $X \times Y$, et soit H l'homotopie. En notant p_X et p_Y les projections, on a bien $f([\gamma])_0 = f([\gamma'])_0$ par l'homotopie $H \circ p_X$, et de même pour $f([\gamma])_1$. De plus, cette application admet une réciproque évidente, qui est elle aussi bien définie. $\square$

Théorème 3.8. π_1 est un foncteur $\mathbf{Top}_x \rightarrow \mathbf{Grp}$

Démonstration. On a vu que π_1 envoie bien un espace pointé sur un groupe. Soit $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$, $g : (Y, y_0) \rightarrow (Z, z_0)$ deux applications continues. Il suffit de démontrer

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X, x_0) & \xrightarrow{f_*} & \pi_1(Y, y_0) \\ & \searrow (g \circ f)_* & \downarrow g_* \\ & & \pi_1(Z, z_0) \end{array}$$

que le diagramme suivant commute :

Soit γ un lacet de X , basé en x_0 . Clairement,

$$\begin{aligned} (f \circ g)_*([\gamma]) &= [f \circ g(\gamma)] \\ &= f_*([g(\gamma)]) \\ &= f_* \circ g_*([\gamma]) \end{aligned}$$

ce qui nous donne le résultat $\square$

A présent qu'on a cela, calculons les groupes fondamentaux de plusieurs espaces :

Exemple 3.9. Soit C un convexe non vide, et soit γ un lacet dans C . Alors, par l'homotopie barycentrique vue dans 2.7, on a donc alors $\pi_1(C) = 0$

Pour le calcul de groupe fondamentaux non triviaux, nous avons besoin de beaucoup plus de machinerie que nous allons détailler maintenant :

On va avoir besoin de la notion de **revêtement** :

Définition 3.10. Soit B un espace topologique. Un **revêtement** est une application $p : E \rightarrow B$ telle que, pour tout $b \in B$, il existe un ouvert, dit **trivialisant**, U autour de b , un espace discret F et un homéomorphisme Φ tel que le diagramme suivant commute :

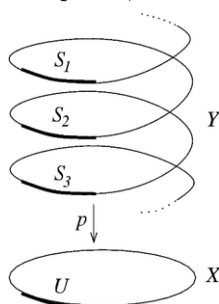
$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U) & \xrightarrow{\Phi} & U \times F \\ & \searrow p & \downarrow \\ & & U \end{array}$$

Remarque 3.11. Si F n'est pas discret, alors on appelle ça un fibré, ce que nous verrons dans la dernière partie.

Remarque 3.12. Un morphisme de revêtements est naturellement un $\Phi : E \rightarrow E'$ qui fait commuter le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\Phi} & E' \\ & \searrow p & \downarrow p' \\ & & B \end{array}$$

Exemple 3.13. L'exemple le plus simple et le plus utile probablement pour comprendre la définition est le revêtement du cercle S^1 par $\mathbb{R}$, avec l'application $p : t \mapsto e^{i2\pi t}$



Sur ce graphique (provenance : wikipedia), la fibre est visiblement dénombrable, ici $F = \mathbb{Z}$. On voit que, localement, un petit ouvert du cercle, pris en produit cartésien avec $\mathbb{Z}$ est homéomorphe à l'image réciproque de ce petit ouvert par p .

Exemple 3.14. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, les applications

$$\begin{aligned} h_n : \mathbb{C} \setminus \{0\} &\rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\} \\ z &\mapsto z^n \end{aligned}$$

sont des revêtements. De manière imagée, on peut voir ça comme $\mathbb{C}$, au dessus duquel on aurait n copies de $\mathbb{C}$ qui sont reliées les unes aux autres (je ne sais pas comment faire un tel dessin).

L'utilité des revêtements se comprend avec le théorème suivant :

Théorème 3.15 (Théorème du relèvement). *Soit $p : (E, e) \rightarrow (B, b)$ un revêtement, soit (Y, y) un espace topologique pointé connexe par arcs et localement connexe par arcs, et soit $f : (Y, y) \rightarrow (B, b)$. Alors, $\text{Im } f_* \subset \text{Im } p_* \iff$ il existe un unique $\tilde{f}$ qui fait commuter le diagramme :*

$$\begin{array}{ccc} & & (E, e) \\ & \nearrow \tilde{f} & \downarrow p \\ (Y, y) & \xrightarrow{f} & (B, b) \end{array}$$

On dit que $\tilde{f}$ est un **relèvement** de f .

Avant de donner la preuve, on va avoir besoin d'un lemme très important :

Lemme 3.16. *Si $Y = [0, 1]$, un tel relèvement existe toujours et est unique.*

Démonstration. Soit $\gamma : ([0, 1], 0) \rightarrow (B, b)$. Soit γ_1 et γ_2 deux relèvements de γ . Si on note $C = \{x \in [0, 1], \gamma_1(x) = \gamma_2(x)\}$, alors on a ici un ensemble ouvert et fermé. Comme $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$, C est non vide, d'où, par connexité de $[0, 1]$, on a l'unicité du relèvement, si celui-ci existe. Passons à présent à l'existence. Recouvrons $[0, 1]$ par les ouverts connexes suivants : Soit $x \in [0, 1]$, et $V_{\gamma(x)}$ un ouvert trivialisant. On note U_x un ouvert connexe tel que $\gamma(U_x) \subset V_{\gamma(x)}$. Ainsi, on a

$$[0, 1] = \bigcup_{x \in [0, 1]} U_x$$

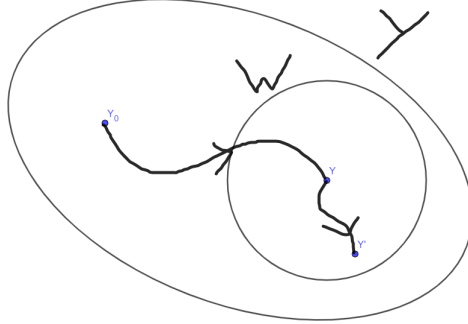
Donc, par compacité,

$$[0, 1] = \bigcup_{i=1}^n U_{x_i}$$

On dispose donc de $0 = t_1 < t_2 < \dots < t_n = 1$ tel que, pour tout $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, $\gamma([t_i, t_{i+1}]) \subset U_{x_i}$. En passant par p^{-1} sur chaque U_{x_i} , comme on en a un nombre fini, et qu'on a déjà $\tilde{\gamma}(0)$, on est donc capable de construire $\tilde{\gamma}$ en entier, d'où le résultat. $\square$

A présent, passons à la preuve du théorème du relèvement :

Démonstration. Evidemment, l'existence de $\tilde{f}$ implique $\text{Im } f_* \subset \text{Im } p_*$. Supposons donc que $\text{Im } f_* \subset \text{Im } p_*$. Soit $y \in Y$ et soit γ un chemin de y_0 à y . On définit alors $\tilde{f}(y) = \tilde{f} \circ \gamma(1)$, où $\tilde{f} \circ \gamma$ provient de 3.16. Vérifions la non dépendance de $\tilde{f}(y)$ du chemin γ choisi : soit γ' un autre chemin de y_0 à y . Par hypothèse, le lacet $[(f \circ \gamma) \cdot (f \circ \gamma')^{-1}] = f_* \circ ([\gamma] \cdot [\gamma']^{-1})$ est dans $\text{Im } p_*$, donc se relève en un lacet. Or, $\tilde{\gamma} \cdot \tilde{\gamma}'^{-1}$ est un tel lacet. Donc, d'après l'unicité dans 3.16, c'est donc le seul relèvement. Donc, $\tilde{f}(y)$ est bien définie, et fait bien commuter le diagramme. Il nous suffit plus que de montrer la continuité de $\tilde{f}$. Soit U un voisinage ouvert de $\tilde{f}(y)$, que l'on peut restreindre à un feuillet d'un ouvert trivialisant de $f(y)$, car ces feuilletts forment une prébase de la topologie sur E . Notons $V := p(U)$. Par continuité de f et propriétés de Y , on peut trouver un voisinage ouvert connexe par arcs de y , noté W , tel que $f(W) \subset V$. Pour montrer la continuité de $\tilde{f}$, il suffit de montrer que $W \subset \tilde{f}^{-1}(U)$. Soit $y' \in W$. Choisissons un chemin γ qui va de y_0 à y' en passant par y . En d'autres termes,



On note α le chemin de y_0 à y et β celui de y à y' . On a donc $\gamma = \alpha \cdot \beta$. Pour calculer $\tilde{f}(y')$, on fait comme précédemment : soit $\tilde{f} \circ \alpha$ le relèvement du premier chemin, et de même $\tilde{f} \circ \beta$ le relèvement du second. La concaténation de ces deux relèvements nous donne donc un relèvement de $f \circ \gamma$, donc l'unique, donc $\tilde{f}(y') = \tilde{f} \circ \gamma(1) \in U$. Donc, on en déduit que $W \subset \tilde{f}^{-1}(U)$, d'où la continuité de $\tilde{f}$. $\square$

On a aussi le cas pour les homotopies :

Corollaire 3.17. Si $f : Y \rightarrow B$ se relève en $\tilde{f}$, et H est une homotopie telle que $H(-, 0) = f$, alors, H admet un relèvement.

Démonstration. Par fonctorialité, on dispose du diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc}
\pi_1(Y \times [0, 1]) & & \pi_1(E) \\
\downarrow & \searrow H_* & \downarrow p_* \\
\pi_1(Y) & \xrightarrow{f_*} & \pi_1(B)
\end{array}$$

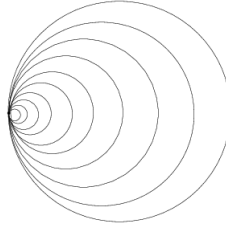
ce qui conclut (grâce à l'isomorphisme induit $i_{1*} : \pi_1(Y \times [0, 1]) \rightarrow \pi_1(Y)$), provenant de 3.7. $\square$

Pour les théorèmes sur l'existence de revêtements dits 'universels', on va se restreindre à une classe plus petite d'espace, ceux où il est localement possible d'homotoper tout les lacets à un lacet constant.

Définition 3.18. Un espace **délaçable** est un espace topologique X pour lequel, pour tout ouvert U , et tout élément $x_0 \in U$, le morphisme $\pi_1(U, x_0) \hookrightarrow \pi_1(X, x_0)$ induit par l'inclusion est le morphisme nul.

Exemple 3.19. Les CW complexes A.22, c'est-à-dire presque tout les objets intéressant, sont localement contractiles, donc, ils sont délaçables

Exemple 3.20. La boucle hawaïenne, en image ci-dessous, n'est pas délaçable :



Au point de rencontre de tout les cercles, il n'existe pas d'ouvert assez petit qui soit simplement connexe

Définition 3.21. Si un revêtement est simplement connexe, on, dit que c'est un revêtement universel

Remarque 3.22. On ne le démontrera pas, mais il y a en fait unicité à isomorphisme de revêtements près du revêtement universel. Cela provient du fait que le revêtement universel est en fait un objet initial dans la catégorie des B -espaces, et c'est d'ailleurs comme ça qu'on peut le définir.

Théorème 3.23. Soit X un espace connexe, localement connexe par arcs et délaçable. Alors, X admet un revêtement universel.

Je ne ferai pas la preuve de ce théorème ici, mais l'idée est de regarder l'espace des lacets, d'y mettre une topologie, et c'est cet espace qui sera un revêtement universel, pour une preuve, on se réfère à [Ha].

Mettons aussi les deux théorèmes suivants, aussi donnés sans démonstration, car les démonstrations nous ennuieraient trop loin dans la théorie des revêtements, ce qui n'est pas le but ici :

Théorème 3.24. Soit (X, x) connexe par arcs et délaçable. Alors, il existe une bijection entre les classes d'isomorphismes de revêtements pointés et les classes de conjugaison des sous-groupe du groupe fondamental de X , donnée par $p \mapsto \text{Im } p_*$

Théorème 3.25. Soit E un ensemble non vide muni d'une action à droite par $\pi_1(B, b)$. Alors, il existe un revêtement $p_E : X_E \rightarrow B$ et une bijection $\pi_1(B, b)$ -équivariante $u_E : p_E^{-1}(b) \rightarrow E$. si, de plus, E' est un autre ensemble, et $f : E' \rightarrow E$ est une applciation (resp. bijection) $\pi_1(B, b)$ équivariante, alors il existe un morphisme (resp. isomorphisme) de revêtements $\Phi_E : X_E \rightarrow X_{E'}$ qui fait commuter le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc}
p_E^{-1}(b) & \xrightarrow{u_E} & E \\
\Phi \downarrow & & \downarrow f \\
p_{E'}^{-1}(b) & \xrightarrow{u_{E'}} & E'
\end{array}$$

Définition 3.26. Le groupoïde fondamental $\Pi(X)$ d'un espace X est la catégorie dont les objets sont les points de X et les morphismes sont les classes d'équivalence de chemins

Remarque 3.27. Par homotopie de chemins, on entend ici *homotopie aux extrémités fixées*

Lemme 3.28. Π est un foncteur $\mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Grpd}$

La preuve est la même que pour le groupe fondamental.

Avec ça, voici une version du théorème de Van Kampen pour les groupoïdes :

Théorème 3.29 (Van Kampen). *Soit $\mathcal{O}$ un recouvrement d'ouverts connexes par arcs de X stable par intersection finie. Dénnotons $\mathcal{J}(\mathcal{O})$ sa catégorie d'incidence. Alors, $\Pi(X)$ est la colimite du diagramme donné par le foncteur Π restreint à $\mathcal{O}$. En d'autres termes,*

$$\Pi(X) \cong \operatorname{colim}_{U \in \mathcal{O}} \Pi(U)$$

Pour la preuve, nous nous référons à [May]. Nous démontrerons ici une version plus faible de ce théorème :

Théorème 3.30 (Van Kampen). *Soit A et B deux sous espaces qui recouvrent un espace X tels que $A \cap B$ est connexe par arcs, et soit $x_0 \in A \cap B$. Supposons aussi que A, B et $A \cap B$ sont délacables. Alors $\pi_1(X, x_0)$ est le pushout de $\pi_1(A, x_0)$ et $\pi_1(B, x_0)$*

Démonstration. En notant $i_A : A \cap B \hookrightarrow A$, $i_B : A \cap B \hookrightarrow B$, $j_A : A \hookrightarrow X$, $j_B : B \hookrightarrow X$, alors, par fonctorialité du π_1 , on dispose du diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(A \cap B, x_0) & \xrightarrow{i_{A*}} & \pi_1(A, x_0) \\ i_{B*} \downarrow & & \downarrow j_{A*} \\ \pi_1(B, x_0) & \xrightarrow{j_{B*}} & \pi_1(X, x_0) \end{array}$$

Soit un groupe G et deux morphismes h_A et h_B faisant commuter le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(A \cap B, x_0) & \xrightarrow{i_{A*}} & \pi_1(A, x_0) \\ i_{B*} \downarrow & & \downarrow h_A \\ \pi_1(B, x_0) & \xrightarrow{h_B} & G \end{array}$$

Tout d'abord, montrons que $j_{A*}\pi_1(A, x_0) \cup j_{B*}\pi_1(B, x_0)$ engendre $\pi_1(X, x_0)$. Soit γ un lacet de X basé en x_0 . Comme dans la preuve de 3.16, par compacité, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $i \in \mathbb{N}$, $\gamma([i/n, (i+1)/n])$ est inclus soit dans A soit dans B . Avec cela, on est donc capable de recréer tout les lacets de X avec seulement des lacets de A ou B , en faisant les raccords nécessaires, avec la connexité par arcs de A et B .

Maintenant, on a $\pi_1(A, x_0)$ et $\pi_1(B, x_0)$ qui agissent sur G par l'action $([\gamma], g) \mapsto gh_A([\gamma])$ (où h_B , respectivement). Soit $p_G : X_G \rightarrow A$ le revêtement de cette action, qui provient de 3.25, et qui a pour fibre G , et p'_G celui pour B . On a aussi deux bijection $\pi_1(A, x_0)$ (resp. $\pi_1(B, x_0)$)-équivariantes : $u_G : p_G^{-1}(b) \rightarrow A$ (resp. $u_G : p'_G^{-1}(b) \rightarrow B$, qui grâce au premier carré commutatif, donné par la fonctorialité du π_1 , nous donnent que les fibres des revêtements p_G restreint à $p_G^{-1}(A)$ et $p'_G^{-1}(B)$ sont en bijection $\pi_1(A \cap B, x_0)$ équivariante, donc, les revêtements sont isomorphes, d'après 3.25. Soit à présent ψ l'isomorphisme, et on notera Y le recollement des deux revêtements par ψ , qui, on peut aussi le démontrer, forme aussi un revêtement. On a donc un revêtement $p : Y \rightarrow X$ tel que, si $q : X_G \coprod X'_G \rightarrow Y$ est la projection canonique, alors q , restreint à chaque X_G , est un isomorphisme de revêtements.

Ce revêtement p , de fibre G , définit donc une action à droite de $\pi_1(X, x_0)$ sur G , notée $(g, x) \mapsto x \cdot g$, action parfois appelée de **monodromie**. Considérons à présent l'application $\phi : \pi_1(X, x_0) \rightarrow G$ telle que $\phi(g) = e \cdot g$. Il nous suffit de montrer que ϕ est un morphisme pour conclure. Comme on a vu que $j_{A*}\pi_1(A, x_0) \cup j_{B*}\pi_1(B, x_0)$ engendre $\pi_1(X, x_0)$, et que pour $i_k \in \{A, B\}$, grâce aux diagrammes commutatifs,

$$\begin{aligned}
\phi(j_{i_1*}(g_1) \cdots j_{i_n*}(g_n)) &= eh_{i_1}(g_1) \cdots h_{i_n}(g_n) \\
&= (eh_{i_1}(g_1)) \cdots (eh_{i_n}(g_n)) \\
&= \phi(j_{i_1*}(g_1)) \cdots \phi(j_{i_n*}(g_n))
\end{aligned}$$

Cela nous donne donc que ϕ est un morphisme, d'où le résultat. $\square$

Remarque 3.31. Généralement, la preuve de ce théorème est, dans une introduction à la topologie algébrique, moins catégorique, et utilise la compacité de $[0, 1]$ pour construire le groupe fondamental de l'union. Pour une preuve de la sorte, je me réfère à [Ha]. La preuve plus catégorique ci-dessus est due à Grothendieck.

4 Applications

Tout d'abord, commençons par le calcul de plusieurs groupes fondamentaux de plusieurs espaces :

Proposition 4.1. $\pi_1(S^1) \simeq \mathbb{Z}$

Démonstration. On munit S^1 du revêtement

$$\begin{aligned}
p : \mathbb{R} &\rightarrow S^1 \\
t &\mapsto e^{i2\pi t}
\end{aligned}$$

Ensuite, notons

$$\begin{aligned}
f : \mathbb{Z} &\rightarrow \pi_1(S^1, 1) \\
n &\mapsto [t \mapsto e^{i2\pi nt}]
\end{aligned}$$

Clairement, f est un morphisme. Soit $[\gamma] \in \pi_1(S^1, 1)$. Soit $\tilde{\gamma}$ le relevé de γ qui vaut 0 en 0. Notons $n := \tilde{\gamma}(1)$. Alors, $\tilde{\gamma}$ et $t \mapsto nt$, qui est un relevé de $f(n)$ sont clairement homotopes aux extrémités fixées, car $\mathbb{R}$ est simplement connexe, et ces deux chemins ont les mêmes extrémités. En composant par p , on a donc $f(n) = [\gamma]$, d'où la surjectivité de f .

Soit à présent $n \in \ker f$. Soit H l'homotopie entre le lacet constant et $t \mapsto e^{i2\pi nt}$. Comme on dispose d'un relèvement trivial du lacet constant, d'après le corollaire de relèvement des homotopies, on dispose de $\tilde{H}$ qui fait commuter le diagramme suivant :

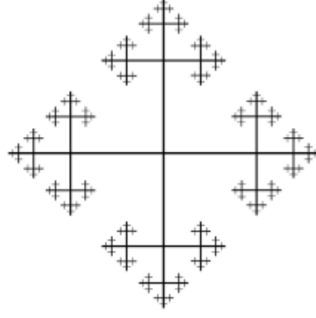
$$\begin{array}{ccc}
& & \mathbb{R} \\
& \nearrow \tilde{H} & \downarrow p \\
[0, 1]^2 & \xrightarrow{H} & S^1
\end{array}$$

Si $n \neq 0$, alors $\tilde{H}(1, 1) \neq 0$. Or, comme $H = p \circ \tilde{H}$ est une homotopie de lacet, $\forall t \in [0, 1]$, $\tilde{H}(1, t)$ doit être constante. Or $\tilde{H}(1, 1) \neq \tilde{H}(1, 0)$. Donc, $n = 0$. Donc, f est bien un isomorphisme. $\square$

Proposition 4.2. $\pi_1(S^1 \vee S^1) \simeq \mathbb{Z} \star \mathbb{Z}$

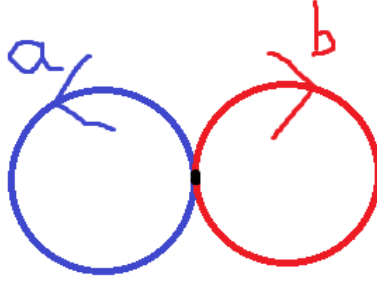
Démonstration. Cela découle de 3.29 et B.16 ainsi que de ce qui est ci-dessus $\square$

Remarque 4.3. On aurait pu deviner ce groupe fondamental en regardant le revêtement universel du bouquet de deux cercles. :



qui est le graphe de Cayley du groupe libre à deux éléments.

Remarque 4.4. Cet exemple est le premier qu'on voit où le groupe fondamental n'est pas commutatif. En effet, il n'existe pas d'homotopie entre le lacet ab et le lacet ba dans le graphique suivant



Proposition 4.5. $\pi_1(S^2) = \{0\}$

Démonstration. Soit $\gamma : S^1 \rightarrow S^2$. Supposons que γ soit basé en x_0 . Notons $A_1 = S^2 \setminus \{x_0\}$ et $A_2 = S^2 \setminus \{-x_0\}$. Par uniforme continuité de γ , comme dans la preuve de 3.16, il existe $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$ tel que $\gamma([t_i, t_{i+1}]) \subset A_j$, où $j \in \{1, 2\}$. Par la projection stéréographique, A_j est simplement connexe, donc, γ est le produit fini de lacets homotopes au lacet constant, donc $[\gamma] = 0$. $\square$

Remarque 4.6. Par la suite, on démontrera une version beaucoup plus générale du fait qu'on ne peut pas envoyer une sphère dans une autre sphère de dimension plus grande de manière non triviale, c'est-à-dire non homotope à une application constante, pour une certaine notion d'homotopie des sphères qu'on verra dans la section 7. J'ai juste besoin de ce fait maintenant.

Ce qui suit est un des théorèmes qui font comprendre l'utilité des actions de groupe dans le calcul de groupes fondamentaux.

Théorème 4.7. Soit G un groupe agissant par revêtement (A.19) sur Y séparé et connexe par arcs. Alors, Y/G est séparé, l'application quotient $p : Y \rightarrow Y/G$ est un revêtement, $p_*\pi_1(Y)$ est distingué dans $\pi_1(Y/G)$, et, on dispose de l'isomorphisme suivant

$$G \simeq \pi_1(Y/G)/p_*\pi_1(Y)$$

Démonstration. Soit $\bar{x}, \bar{y} \in Y/G$. Soit U, V les deux ouverts qui séparent x et y . Comme l'action est proprement discontinue, on a clairement que $p(U)$ et $p(V)$ séparent $\bar{x}$ et $\bar{y}$. Or, $p^{-1}(p(U)) = \cup_{g \in G} gU$. Donc, $p(U)$ et $p(V)$ sont ouverts. Donc, Y/G est séparé. Soit à présent $y \in Y/G$, et U l'ouvert de l'errance de l'action. On note $V = p(U)$. Or, $p^{-1}(V) = \coprod_{g \in G} gU$. Donc, p est un revêtement.

Soit à présent $y \in Y$. Soit $[\gamma] \in \pi_1(Y/G, \bar{y})$, et soit $\tilde{\gamma}$ son relevé qui vaut y en 0. Par définition du quotient, G agit transitivement sur les fibres. Donc, il existe $g \in G$, $gy = \tilde{\gamma}(1) := \tilde{y}$. Donc, on a $[\gamma]^{-1}p_*\pi_1(Y, y)[\gamma] = p_*\pi_1(Y, \tilde{y})$. Comme $g : Y \rightarrow Y$ est un isomorphisme de revêtements, on a, par fonctorialité, $[\gamma]^{-1}p_*\pi_1(Y, y)[\gamma] = p_*\pi_1(Y, y)$. Donc, ce sous-groupe est bien distingué.

Remarquons maintenant que l'action de G est simplement transitive. Pour chaque $y \in Y$ et $[\gamma] \in \pi_1(Y/G, \bar{y})$, on dispose donc d'un unique $g \in G$ tel que $gy = y \cdot [\gamma]$ où $y \cdot [\gamma]$ est l'action de monodromie. Fixons $y \in Y$, et définissons :

$$h : \pi_1(Y/G, \bar{y}) \rightarrow G$$

$$[\gamma] \mapsto g$$

Comme $\text{Im } p_*$ est inclus dans $\pi_1(Y/G, \bar{y})$ et que Y est connexe par arcs, h est surjective. Tout les relèvements que j'écris ensuite seront de base y . Soit γ, γ' deux lacets de base $\bar{y}$. Soit g, g' leurs images par h . L'astuce maintenant est que $\tilde{\gamma}'(g \cdot \tilde{\gamma})$ est un relèvement de $\gamma\gamma'$. Donc, en abusant et écrivant gy à la place de g ,

$$\begin{aligned} h[\gamma\gamma'] &= \tilde{\gamma}'(g \cdot \tilde{\gamma})(1) \\ &= g'(g \cdot \tilde{\gamma})(1) \\ &= g'gy \end{aligned}$$

On conclut bien que h est un morphisme de groupe. De plus, comme l'action est errante, $\ker h = \text{Im } p_*$ □

Corollaire 4.8. *Si Y est simplement connexe, $G \simeq \pi_1(Y/G)$*

Ce théorème a énormément d'applications.

Proposition 4.9. *Soit $n \geq 2$. Alors, $\pi_1(\mathbb{R}P^n) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$*

Démonstration. On munit S^n de l'action de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ qui a $(1, x) \mapsto -x$. Cette action est clairement une action de revêtement. Par le corollaire ci-dessus, et simple connexité de S^n , et comme $S^n/(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathbb{R}P^n$, on en déduit la proposition. □

On peut aussi retrouver le groupe fondamental du cercle, par l'action de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{R}$ par addition.

Proposition 4.10. *On a $\pi_1(SO_3(\mathbb{R})) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$*

Démonstration. On muni $SO_3(\mathbb{R})$ d'un revêtement par S^3 à deux feuillets. On considère S^3 comme la boule unité de l'algèbre des quaternions $\mathbb{H}$. On considère aussi $SO_3(\mathbb{R}) \simeq SO(\mathbb{H}_0)$ où $\mathbb{H}_0$ sont les quaternions purs. On a donc

$$f : S^3 \rightarrow SO(\mathbb{H}_0)$$

$$u \mapsto (x \mapsto uxu^{-1})$$

Il se trouve que cette application est un revêtement à deux feuillets. Donc, par simple connexité de S^3 , on en déduit que $\pi_1(SO_3(\mathbb{R})) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ □

Remarque 4.11. C'est un cas particulier de ce qu'on appelle le groupe spinoriel, qui est un revêtement à deux feuillets de $SO_n(\mathbb{R})$

Proposition 4.12. *Deux espaces ayant le même type d'homotopie ont un groupe fondamental isomorphe*

Démonstration. Soit $f : X \rightarrow Y$ et $g : Y \rightarrow X$ telles que fg est homotope à id_Y et gf à id_X . Par fonctorialité, et comme deux fonctions homotopes ont le même morphisme induit, $f_*g_* = id_{\pi_1(Y)}$ et $g_*f_* = id_{\pi_1(X)}$ □

On en déduit :

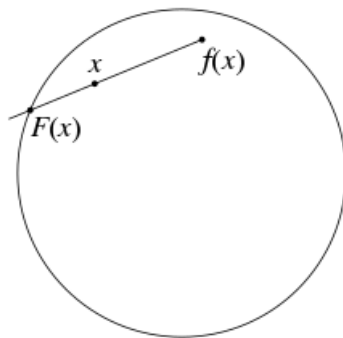
Proposition 4.13. — $\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \simeq \mathbb{Z}$

— $\pi_1(SO_2(\mathbb{R})) \simeq \mathbb{Z}$

Passons à présent à des théorèmes qui peuvent se démontrer à l'aide du groupe fondamental.

Théorème 4.14 (Point fixe de Brouwer). *Soit $f : D^2 \rightarrow D^2$ continue. Alors, f admet un point fixe*

Démonstration. Soit $f : D^2 \rightarrow D^2$. Supposons que f n'admette pas de point fixe. Alors, on définit la fonction F comme suivant sur le dessin :



Montrons que F est continue : F est défini comme étant :

$$F : D^2 \rightarrow S^1$$

$$(x, y) \mapsto t(x, y) + (1 - t)f(x, y)$$

où $t \in \mathbb{R}$ est choisi tel que $t(x, y) + (1 - t)f(x, y)$ soit de norme 1 (et du bon côté de la demi-droite). Or, par calcul, un tel t est une racine d'un polynôme du second degré, où le coefficient dominant ne peut s'annuler. Comme la fonction qui a un triplet de nombre associe une racine d'un polynome est continue, alors, de même F est continue. On peut s'en convaincre géométriquement avec la continuité de f . Or, F laisse S^1 fixe. Donc, F est une rétraction. Donc, on dispose d'une rétraction $D^2 \rightarrow S^1$. Par functorialité, on a donc le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \xrightarrow{i_*} & 0 \xrightarrow{F_*} \mathbb{Z} \\ & \searrow id & \nearrow \\ & & \end{array}$$

ce qui est visiblement absurde. Donc, f admet un point fixe □

Remarque 4.15. Ce théorème existe en dimension n , mais nécessite d'autres outils

On va de même démontrer un autre théorème très connu de topologie algébrique, mais cependant que en dimension 2, les dimensions supérieures nécessitant aussi de l'homologie.

Théorème 4.16 (Borsuk-Ulam). *Soit $f : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Alors, il existe $x \in S^2$ tel que $f(x) = f(-x)$*

Démonstration. Soit f une fonction $S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, mais pour laquelle il n'existe pas de x tel que $f(x) = f(-x)$. On définit alors

$$g : S^2 \rightarrow S^1$$

$$x \mapsto \frac{f(x) - f(-x)}{\|f(x) - f(-x)\|}$$

Soit à présent le lacet α qui fait le tour de l'équateur : $\alpha : t \mapsto (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t), 0)$. Par imparité de g , $\forall t \in [0, 1/2]$, $g_*\alpha(t + 1/2) = -g_*\alpha(t)$. Par propriété de relèvement des lacets, soit p une fonction valant 0 en 0, telle que

$$g_*\alpha(t) = (\cos(2\pi p(t)), \sin(2\pi p(t)))$$

On en déduit que $\forall t \in [0, 1/2]$, $2(p(t + 1/2) - p(t)) \in \mathbb{Z}$. Par continuité de p , comme $\mathbb{Z}$ est discret, $p(1) = 2c/2 = c \in \mathbb{Z}$. De plus, c est impair, et en particulier, non nul. Donc, $g_*\alpha$ n'est pas homotope à un point. Comme $\pi_1(S^2) = \{0\}$, d'après 4.5, cela est absurde. □

Maintenant, démontrons le théorème fondamental de l'algèbre grâce au groupe fondamental !

Théorème 4.17 (d'Alembert-Gauss). *Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant. Alors, P admet une racine complexe.*

Démonstration. Soit $n \geq 1$ tel que, $\forall z \in \mathbb{C}$,

$$P(z) = z^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i z^i$$

Supposons que P n'ait pas de racine complexe. Soit $r \geq \max(1, \sum_{i=0}^{n-1} |a_i|)$. Clairement, on obtient

$$r^n > \left| \sum_{i=0}^{n-1} a_i z^i \right|$$

Soit $Q_t(z) = z^n + t(\sum_{i=0}^{n-1} a_i r^i)$. On définit alors l'homotopie

$$H : rS^1 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$$

$$(z, t) \mapsto \frac{Q_t(z)/Q_t(0)}{\|Q_t(z)/Q_t(0)\|}$$

Cette homotopie est bien définie et nous donne une homotopie de lacet, entre le lacet constant et le lacet qui fait n tours du cercle, ce qui d'après la preuve du groupe fondamental du cercle, est faux. D'où le théorème. $\square$

Signalons aussi ce théorème de théorie des groupes, duquel nous donnerons une idée de la preuve :

Théorème 4.18 (Nielsen Schreier). *Tout sous-groupe d'un groupe libre est un groupe libre*

Démonstration. On va utiliser une correspondance entre les groupes libres et les groupes fondamentaux de graphes. Soit G un groupe libre. G est le groupe fondamental d'un certain bouquet de cercles, interprété comme un graphe à un sommet, et a autant d'arrêtes que le groupe a de générateurs. Le graphe est noté Γ . Soit à présent H un sous-groupe de G . On montre maintenant que H est le groupe fondamental d'un certain autre graphe, en l'occurrence le graphe de Schreier. On montre que tout graphe connexe a un groupe fondamental libre, et donc H est libre. $\square$

Remarque 4.19. Ce résultat est un résultat où l'on utilise des notions topologiques pour démontrer un résultat d'algèbre, ce qui est à peu près l'inverse de tout ce que j'ai fait le reste du temps.

5 Un peu d'homologie et de cohomologie

Passons à présent à autre chose : l'homologie et la cohomologie. Cette section va être plus courte, du fait que j'en ai pas fait beaucoup, je n'y connais pas grand chose, et la majeure raison pour laquelle j'ai décidé de faire cette section est pour le théorème d'Hurewicz, ainsi que pour la suite spectrale de Serre, nécessaire pour calculer les groupes d'homotopies supérieurs. Je ne présenterai ici que la (co)homologie cellulaire, car, comme je travaille sur les groupes d'homotopies des sphères, c'est naturellement celle qui est le plus utile. Très peu de démonstrations seront données, car elles nécessitent beaucoup de place.

Définition 5.1. Soit

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{i+2}} A_{i+1} \xrightarrow{\partial_{i+1}} A_i \xrightarrow{\partial_i} A_{i-1} \xrightarrow{\partial_{i-1}} \cdots$$

une suite de groupes abéliens, muni de morphismes, indexée par l'ensemble des entiers relatifs. Si $\forall i \in \mathbb{Z}$, $\partial_i \circ \partial_{i+1} = 0$, alors, on dit que cette suite d'espace est un **complexe de chaînes**.

Remarque 5.2. Généralement, cette chaîne sera indexée par $\mathbb{N}$ et non $\mathbb{Z}$

Remarque 5.3. Cette définition se généralise à toute catégorie abélienne (catégorie où l'on peut ajouter les morphismes, et où l'on dispose d'une notion de noyau), mais nous n'en ferons pas usage ici

Remarque 5.4. Un morphisme de complexe de chaînes $f : A_\bullet \rightarrow B_\bullet$ est naturellement un ensemble de morphismes qui fait commuter tout les carrés :

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longleftarrow & A_{i-1} & \longleftarrow & A_i & \longleftarrow & A_{i+1} & \longleftarrow & \cdots \\ & & \downarrow f_{i-1} & & \downarrow f_i & & \downarrow f_{i+1} & & \\ \cdots & \longleftarrow & B_{i-1} & \longleftarrow & B_i & \longleftarrow & B_{i+1} & \longleftarrow & \cdots \end{array}$$

Définition 5.5. Soit $A_\bullet$ un complexe de chaîne. Le n -ème groupe d'homologie de $A_\bullet$ est le groupe $H_n(A_\bullet) := \ker(\partial_n) / \text{Im}(\partial_{n+1})$.

Avant de parler d'homologie et de cohomologie, j'ai besoin d'un lemme très important :

Lemme 5.6. *Soit*

$$0 \longrightarrow C \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} E \longrightarrow 0$$

une suite exacte courte de complexe de chaînes, Alors, il existe une suite exacte longue

$$\cdots \longrightarrow H_{n+1}(E) \xrightarrow{\delta} H_n(C) \xrightarrow{f_*} H_n(D) \xrightarrow{g_*} H_n(E) \xrightarrow{\delta} H_{n-1}(C) \longrightarrow \cdots$$

Démonstration. Pour la preuve, je me réfère à [Pa]. □

Définition 5.7. Soit X un CW complexe (A.22) et $(e_\alpha)_{\alpha \in A_p}$ l'ensemble de ses p -cellules ouvertes. Soit $H_n(X_n, X_{n-1})$ le groupe abélien libre généré par les n cellules de X . Soit une n -cellule e_n^α , et soit $\phi_\alpha : S^{n-1} \rightarrow X_{n-1}$ son application de recollement. Soit e_{n-1}^β une $n-1$ -cellule. Notons $\phi_{\alpha\beta}$ la composition

$$S^{n-1} \xrightarrow{\phi_\alpha} X_{n-1} \xrightarrow{p} X_{n-1} / (X_{n-1} \setminus e_{n-1}^\beta)$$

Par l'isomorphisme $X_{n-1} / (X_{n-1} \setminus e_{n-1}^\beta) \simeq S^{n-1}$ que nous expliciterons, notons à présent

$$\partial_n : H_n(X_n, X_{n-1}) \rightarrow H_{n-1}(X_{n-1}, X_{n-2})$$

$$e_n^\alpha \mapsto \sum_{\beta} \deg(\phi_{\alpha\beta}) e_{n-1}^\beta$$

que l'on complète par linéarité. On a le complexe de chaîne suivant :

$$\cdots \longrightarrow H_{n+1}(X_{n+1}, X_n) \xrightarrow{\partial_{n+1}} H_n(X_n, X_{n-1}) \xrightarrow{\partial_n} \cdots \xrightarrow{\partial_2} H_1(X_1, X_0) \xrightarrow{\partial_1} 0$$

Alors, on appelle le n -ième groupe d'homologie cellulaire de l'espace X le groupe abélien

$$H_n(X) := \frac{\ker(\partial_n)}{\text{Im}(\partial_{n+1})}$$

Justifions à présent toutes les définitions présentées ci-dessus :

Démonstration. Tout d'abord, l'isomorphisme $X_{n-1} / (X_{n-1} \setminus e_{n-1}^\beta) \simeq S^{n-1}$: Soit

$$f : X_{n-1} \rightarrow B^{n-1}$$

$$x \mapsto \begin{cases} x & \text{si } x \in e_{n-1}^\beta \\ (1, 0, \dots, 0) & \text{sinon} \end{cases}$$

Cela nous donne, par passage au quotient, un isomorphisme $X_{n-1} / (X_{n-1} \setminus e_{n-1}^\beta) \simeq B^{n-1} / \partial B^{n-1}$.

En effet, on a bien $f((X_{n-1} \setminus e_{n-1}^\beta)) = \partial B^{n-1}$. Donc, d'après A.20, on dispose de l'isomorphisme voulu. Pour le complexe de chaîne, je me réfère à [Pa]. □

Remarque 5.8. Le degré d'une application $f : S^n \rightarrow S^n$ est définie comme étant le λ tel que $f_* \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, $x \mapsto \lambda x$. Le problème, pour cela, est qu'on a une logique circulaire. Pour montrer $H_n(S^n) \simeq \mathbb{Z}$, on a d'abord besoin de définir le degré. Le moyen de sortir de cet argument circulaire est de parler d'homologie singulière, ce qui nous emmènerai trop loin, j'ai donc décidé que les $H_n(S^n)$ sont posés ici comme étant $\mathbb{Z}$.

Définition 5.9. L'homologie réduite est définie comme étant, pour tout n , $H_n(X) := H_n(X, \{x\})$

Remarque 5.10. $\forall n > 0$, $H_n(X) := H_n(X)$, et $H_0(X) = H_0(X) \oplus \mathbb{Z}$

Passons aux théorèmes, qui seront donnés sans démonstration par manque de place

Théorème 5.11 (Fonctorialité). *Cette construction est fonctorielle*

Théorème 5.12 (Théorème d'écrasement). *Soit A un fermé de X , retract par déformation d'un voisinage ouvert. Alors, pour tout $i \in \mathbb{N}$:*

$$H_i(X, A) \simeq H_i(X/A, A) = H_i(\tilde{X}/A)$$

On en déduit, grâce à 5.6 que la suite exacte longue d'une paire (X, A) devient :

$$\dots \rightarrow \tilde{H}_i(A) \rightarrow \tilde{H}_i(X) \rightarrow \tilde{H}_i(X/A) \xrightarrow{\delta} \tilde{H}_{i-1}(A) \rightarrow \tilde{H}_{i-1}(X) \rightarrow \dots \rightarrow \tilde{H}_0(X/A) \rightarrow$$

On en déduit aussi le théorème de Brouwer en dimension n :

Théorème 5.13. *Soit $f : D^n \rightarrow D^n$ continue. Alors, f admet un point fixe*

Démonstration. La preuve est essentiellement la même que 4.14. Soit $f : D^n \rightarrow D^n$ n'ayant pas de point fixe. On crée la rétraction qui à x associe le point sur lequel la demi droite $[x, f(x))$ touche la sphère. On a donc une retraction. Par fonctorialité,

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{H}_{n-1}(S^{n-1}) & \xrightarrow{i_*} & \tilde{H}_{n-1}(D^n) & \xrightarrow{r_*} & \tilde{H}_{n-1}(S^{n-1}) \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & id_* & & \end{array}$$

ce qui est absurde car $\tilde{H}_{n-1}(D^n) = \{0\}$ □

Théorème 5.14 (Mayer-Vietoris). *Soit U, V deux ouverts recouvrant X . Alors, on dispose de la suite exacte longue suivante, dite suite de Mayer-Vietoris :*

$$\dots \rightarrow H_i(U) \oplus H_i(V) \xrightarrow{(1)} H_i(X) \xrightarrow{(2)} H_{i-1}(U \cap V) \xrightarrow{(3)} H_{i-1}(U) \oplus H_{i-1}(V) \rightarrow \dots$$

Je n'ai pas la place pour présenter les groupes de cohomologie. A la place, je présenterai les théorèmes les utilisant, et je supposerai connus les valeurs des groupes de cohomologie que je donnerai. Comme pour l'homologie, on dispose d'un complexe de chaîne :

$$\dots \longleftarrow C_{i+1}^* \xleftarrow{d_i} C_i^* \xleftarrow{d_{i-1}} C_{i-1}^* \longleftarrow \dots$$

et on définit les groupes de cohomologie de la même manière. Tout les théorèmes (excision, Mayer-Vietoris) marchent encore, mais on a aussi de la structure en plus. Par exemple :

Définition 5.15. On définit l'anneau de cohomologie :

$$H^*(X) := \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} H^n(X)$$

Ce groupe est en fait bien un anneau. On dispose bien d'une application, qu'on appelle le 'cup-produit'

$$H^k(X) \times H^l(X) \rightarrow H^{k+l}(X)$$

, qui s'étend naturellement à $H^*(X)$ Cet anneau est compliqué à calculer. Pour essayer de l'approximer, on va avoir besoin de la notion de filtration :

Définition 5.16. Soit X un CW complexe et

$$A_0 \hookrightarrow A_1 \hookrightarrow A_2 \hookrightarrow \dots \hookrightarrow A_n \hookrightarrow X$$

une suite finie d'inclusion. Une telle suite est appelée une **filtration**

Exemple 5.17. Par exemple, la suite $X_0 \hookrightarrow X_1 \hookrightarrow X_2 \hookrightarrow \dots \hookrightarrow X_n \hookrightarrow X$ d'inclusion du k squelette dans le $k + 1$ squelette est une filtration.

Donc, comme, comme pour l'homologie, on a une suite longue de cohomologie, une filtration nous donne l'existence de n suites longues de cohomologie. L'idée de cela est que, quand la cohomologie de X est trop dure à calculer, il est plus simple de calculer celle de ces sous ensembles la, et de pouvoir, avec un peu de chance, remonter à la cohomologie de X . On verra des applications de ces notions avec les suites spectrales dans la dernière partie.

6 Les groupes d'homotopie

La raison pour laquelle j'ai choisi ce sujet de stage est que, après avoir fait un peu de topologie algébrique, je suis tombé sur ce diagramme :

	π_1	π_2	π_3	π_4	π_5	π_6	π_7	π_8	π_9	π_{10}	π_{11}	π_{12}	π_{13}	π_{14}	π_{15}
s^0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
s^1	Z	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
s^2	0	Z	Z	Z ₂	Z ₂	Z ₁₂	Z ₂	Z ₂	Z ₃	Z ₁₅	Z ₂	Z ₂ ²	Z ₁₂ ×Z ₂	Z ₈₄ ×Z ₂ ²	Z ₂ ²
s^3	0	0	Z	Z ₂	Z ₂	Z ₁₂	Z ₂	Z ₂	Z ₃	Z ₁₅	Z ₂	Z ₂ ²	Z ₁₂ ×Z ₂	Z ₈₄ ×Z ₂ ²	Z ₂ ²
s^4	0	0	0	Z	Z ₂	Z ₂	Z×Z ₁₂	Z ₂ ²	Z ₂ ²	Z ₂₄ ×Z ₃	Z ₁₅	Z ₂	Z ₂ ³	Z ₁₂₀ ×Z ₁₂ ×Z ₂	Z ₈₄ ×Z ₂ ⁵
s^5	0	0	0	0	Z	Z ₂	Z ₂	Z ₂₄	Z ₂	Z ₂	Z ₂	Z ₃₀	Z ₂	Z ₂ ³	Z ₇₂ ×Z ₂
s^6	0	0	0	0	0	Z	Z ₂	Z ₂	Z ₂₄	0	Z	Z ₂	Z ₆₀	Z ₂₄ ×Z ₂	Z ₂ ³
s^7	0	0	0	0	0	0	Z	Z ₂	Z ₂	Z ₂₄	0	0	Z ₂	Z ₁₂₀	Z ₂ ³
s^8	0	0	0	0	0	0	Z	Z ₂	Z ₂	Z ₂₄	0	0	0	Z ₂	Z×Z ₁₂₀

Ce graphique m'a passionné : pourquoi les groupes d'homotopie des sphères, qui, à première vue, devraient être simples, c'est juste enrouler une sphère autour d'une autre non ? Pourquoi sont-ils aussi chaotiques ? Il se trouve que la question de la classification des groupes d'homotopie des sphères n'est toujours pas résolu. C'est pour cela que j'ai voulu faire un stage qui parle de ces groupes. Bon, il se trouve que cette question était peut-être un peu (trop ?) compliquée, et je n'ai calculé que très peu de groupes d'homotopie des sphères.

Définition 6.1. Soit X un espace et $x_0 \in X$. On note alors $\pi_n(X, x_0)$ les classes d'homotopies des applications continues $f : ([0, 1]^n, \partial[0, 1]^n) \rightarrow (X, x_0)$

Comme pour le groupe fondamental, on munit cet ensemble d'une composition : Soit $f, g \in \pi_n(X, x_0)$. Alors, notons

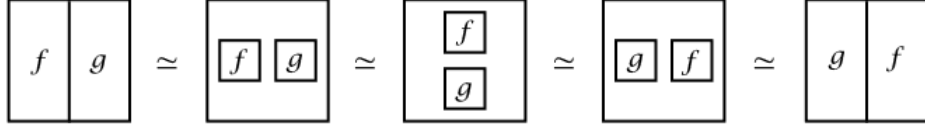
$$+ : \pi_n(X, x_0)^2 \rightarrow \pi_n(X, x_0)$$

$$([f], [g]) \mapsto \left((t_1, \dots, t_n) \mapsto \begin{cases} f(2t_1, t_2, \dots, t_n) & \text{si } t_1 \leq \frac{1}{2} \\ g(2t_1 - 1, t_2, \dots, t_n) & \text{sinon} \end{cases} \right)$$

On vérifie facilement que cette application est bien définie.

Théorème 6.2. Pour $n \geq 2$, $\pi_n(X, x_0)$ est un groupe abélien.

Démonstration. Je ne démontrerais pas que $\pi_n(X, x_0)$ est un groupe : les arguments sont les mêmes que pour le groupe fondamental. Cependant, le fait que le groupe soit abélien est unique au fait que $n \geq 2$. Démontrons, visuellement, pour $n = 2$, l'homotopie entre $f + g$ et $g + f$:



où ce graphique provient de [Ha]. Les endroits où il y a ni f ni g sont tout simplement l'applciation constante en x_0 . $\square$

On voit bien à présent, ce qui empêche au π_1 d'être abélien. Il n'est pas possible d'effectuer la manœuvre ci dessus en 1 seule dimension. Dit autrement, si on a des convexes compacts dans $\mathbb{R}^n$, on peut les homotoper l'un à l'autre sans qu'ils ne se touchent jamais si, et seulement si, $n \geq 2$

Remarque 6.3. D'après A.20, on peut voir $\pi_n(X, x_0)$ comme les classes d'homotopie d'applications $(S^n, x_0) \rightarrow (X, x_0)$.

Remarque 6.4. Comme pour le π_1 , si X est connexe par arcs, $\pi_n(X, x_0)$ ne dépend pas de x_0 .

Théorème 6.5. π_n est un foncteur $\mathbf{Top}_x \rightarrow \mathbf{Ab}$

Démonstration. Soit $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$. On définit

$$f_* : \pi_n(X) \rightarrow \pi_n(Y)$$

$$[g] \mapsto [f \circ g]$$

Si $g, g' \in [g]$ et H est l'homotopie entre les deux, alors, $f \circ H$ est une homotopie entre $f \circ g$ et $f \circ g'$. De même que pour le π_1 , on a aussi $f_* \circ g_* = (f \circ g)_*$. $\square$

On a aussi le théorème suivant sur les revêtements, qui montre son utilité pour les groupes d'homotopie supérieurs :

Proposition 6.6. Soit $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$ un revêtement. Alors, p induit un isomorphisme, pour $n \geq 2$:

$$\pi_n(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \simeq \pi_n(X, x_0)$$

Démonstration. Soit $f : (S^n, s_0) \rightarrow (X, x_0)$. D'après 3.15, par simple connexité de S^n pour $n \geq 2$, on dispose de

$$\begin{array}{ccc} & & (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \\ & \nearrow \tilde{f} & \downarrow p \\ (S^n, s_0) & \xrightarrow{f} & (X, x_0) \end{array}$$

ce qui nous donne la surjectivité. Or, comme p est un revêtement, p_* est une injection. D'où l'isomorphisme. $\square$

Comme pour les groupes d'homologie, on dispose d'une suite exacte longue sur les groupes d'homotopie des paires. Pour cela, définissons d'abord le groupe d'homotopie d'une paire :

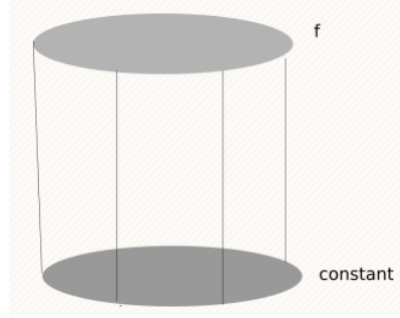
Définition 6.7. Soit (X, A) une paire de CW complexes et $x_0 \in A$. Si I^n est le cube de dimension n , on peut considérer que sa dernière face, c'est à dire celle pour laquelle $t_n = 0$ est I^{n-1} . De même, notons $J^{n-1} : \partial I^n \setminus I^{n-1}$ l'union de toute les autres faces. Alors, on définit $\pi_n(X, A, x_0)$ comme les classes d'homotopie des applications

$$(I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \rightarrow (X, A, x_0)$$

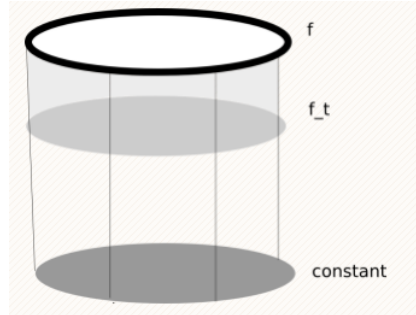
Au lieu, comme pour le groupe d'homotopie d'un espace, d'envoyer tout le bord sur un point, il y a une face du bord qui a le droit de bouger dans tout A . On peut démontrer que cela est un groupe pour $n \geq 2$ et qu'il est abélien pour $n \geq 3$. On peut démontrer que $I^n/J^{n-1} \simeq D^n$ et que $\partial I^n/J^{n-1} \simeq S^{n-1}$. On peut, comme pour le π_1 , considérer que les applications dans $\pi_n(X, A, x_0)$ sont en fait les classes d'homotopie des applications $(D^n, S^n, x_0) \rightarrow (X, A, x_0)$. On dispose aussi du fait suivant :

Lemme 6.8. Une fonction $f : (D^n, S^{n-1}, x_0) \rightarrow (X, A, x_0)$ vaut 0 dans $\pi_n(X, A, x_0)$ si, et seulement si, f est homotope relativement à S^{n-1} à une application dont l'image est contenue dans A .

Démonstration. Supposons d'abord que f est homotope relativement à S^{n-1} à $g : D^n \rightarrow A$, et soit H l'homotopie. Alors, comme D^n est contractile, f est homotope à une application constante, et comme l'homotopie qui amène D^n à x_0 reste dans A , on a bien une homotopie modulo ce qu'on voulait. Réciproquement, supposons que f soit homotope à une application triviale, et soit $H : (D^n, S^{n-1}, x_0) \times I \rightarrow (X, A, x_0)$ l'homotopie. Prouvons le visuellement pour $n = 2$ (graphiques venant d'ici). On a l'homotopie suivante :



Or, sur tout les bords qui sont là, c'est-à-dire sur $S^{n-1} \times I$, $H(x, t) \in A$. Voyons ce cylindre comme un verre, et supposons que le disque du dessus soit fait d'une matière qu'on peut déformer facilement, comme de la pâte à modeler. Alors, l'homotopie qu'on veut, c'est celle où l'on pousse le disque du haut de plus en plus vers le bas, mais où la frontière ne bouge pas. On a collé la pâte à modeler sur le rebord du verre, et l'on pousse progressivement le reste en bas, tout en collant les rebords du verre.



Cela nous donne bien une homotopie relativement à S^{n-1} entre f et une fonction à valeur dans A □

Et on a donc le théorème voulu :

Théorème 6.9. On a la suite exacte longue suivante :

$$\cdots \longrightarrow \pi_n(A, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(X, x_0) \xrightarrow{j_*} \pi_n(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(A, x_0) \longrightarrow \cdots$$

Remarque 6.10. i est l'inclusion de A dans X et j celle de (X, x_0, x_0) dans (X, A, x_0) . Quand à ∂ , c'est la restriction d'une fonction de I^n à sa dernière face, celle qu'on a définie comme étant dans A .

Remarque 6.11. Vers la fin, la structure de groupe n'est plus définie. On peut quand même faire sens de l'exactitude. L'image d'une application est exactement les fonctions (à homotopie près) qui sont envoyés sur une fonction homotope à la fonction constante par la prochaine application. Je ne démontrerai l'exactitude que pour $n \geq 2$.

Démonstration. Soit $n \geq 2$.

1. *Exactitude à $\pi_n(X, x_0)$:* Soit $f : (I^n, \partial I^n) \rightarrow (A, x_0)$. D'après 6.8, $j_* i_* [f] = 0$. Soit $f \in \ker j_*$. Encore d'après 6.8, $f \in \text{Im } i_*$

2. *Exactitude à $\pi_n(X, A, x_0)$* : Clairement, $\partial j_* = 0$. Réciproquement, soit $f : (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \rightarrow (X, A, x_0)$ telle que, restreint à sa dernière face, cette application soit homotope à une application constante $(I^{n-1}, x_0) \rightarrow (A, x_0)$. Soit H une telle homotopie. Alors, pour trouver un antécédent de f par j_* , on choisit l'homotopie constante sur $I^n \setminus I^{n-1}$, mais qui vaut H sur I^{n-1} .
3. *Exactitude à $\pi_{n-1}(A, x_0)$* : Soit $f : (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \rightarrow (X, A, x_0)$. On note $\tilde{f}$ sa restriction à la dernière face, et il se trouve que f est une homotopie maintenant ! C'est incroyable. Donc, f est une homotopie, relativement à ∂I^{n-1} de $\tilde{f}$ vers une application constante. Réciproquement, soit $f \in \ker i_*$ et H l'homotopie à la fonction constante. Alors, $\partial H = f$. $\square$

Définition 6.12. Un espace X est dit n -connexe si $\pi_i(X) = 0$ pour tout $i \leq n$.

Définition 6.13. Une **fibration** est une application $p : E \rightarrow B$ qui a la 'covering homotopy property' (CHP), c'est-à-dire qu'il existe toujours $\tilde{H}$ qui fait commuter le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{f} & E \\ i \downarrow & \nearrow \tilde{H} & \downarrow p \\ Y \times [0, 1] & \xrightarrow{H} & B \end{array}$$

où $i(y) = (y, 0)$

Remarque 6.14. La fibration sera souvent écrite de la manière suivante : $F \hookrightarrow E \rightarrow B$ où F est la fibre.

Exemple 6.15. Les applications qui n'ont la CHP que pour les boules sont appelées des *fibrations de Serre* et elles jouent un rôle particulier dans les CW complexes.

Exemple 6.16. Les revêtements sont des fibrations.

La raison pour laquelle les fibrations sont si intéressantes et sans doute grâce au théorème qui suit, qui nous permet de calculer les groupes d'homotopies plus facilement :

Théorème 6.17. Soit $p : E \rightarrow B$ une fibration de Serre. Soit $b_0 \in B$ et $x_0 \in p^{-1}(b_0) = F$. Alors, $\forall n \geq 1$, $p_* : \pi_n(E, F, x_0) \rightarrow \pi_n(B, b_0)$ est un isomorphisme

Il se trouve que les fibrations de Serre ont aussi la CHP pour les paires de CW complexes (X, A) , dans le sens où le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} X \times \{0\} \cup A \times [0, 1] & \xrightarrow{f} & E \\ i \downarrow & \nearrow \tilde{H} & \downarrow p \\ X \times [0, 1] & \xrightarrow{H} & B \end{array}$$

ce qui est démontré dans [Ha].

Démonstration. Tout d'abord, montrons la surjectivité de p_* . Soit $f : (I^n, \partial I^n) \rightarrow (B, b_0)$. l'application constante à x_0 nous donne une application $g : I^{n-1} \times \{0\} \cup \partial I^{n-1} \times [0, 1] \rightarrow E$. On a donc le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} I^{n-1} \times \{0\} \cup \partial I^{n-1} \times [0, 1] & \xrightarrow{g} & E \\ i \downarrow & \nearrow \tilde{f} & \downarrow p \\ I^{n-1} \times [0, 1] & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

Or, ici, $\tilde{f}(\partial I^n) \subset F$ car $\tilde{f}(\partial I^n) = x_0$ par commutativité du triangle du haut. On a donc $p_*([\tilde{f}]) = f$. Passons à présent à l'injectivité : Soit $\tilde{f}_0, \tilde{f}_1 : (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \rightarrow (E, F, x_0)$ telles que $p_*([\tilde{f}_0]) = p_*([\tilde{f}_1])$ Soit $G : (I^n \times I, \partial I^n \times I) \rightarrow (B, b_0)$ l'homotopie. Par les mêmes arguments que pour la surjectivité, on peut trouver une homotopie $\tilde{G}$ entre $\tilde{f}_0$ et $\tilde{f}_1$. D'où l'injectivité. $\square$

En combinant ceci avec la suite exacte longue des paires de groupes d'homotopie, on a le résultat suivant :

Théorème 6.18. *Soit*

$$F \longrightarrow E \xrightarrow{p} B$$

une fibration, et supposons de plus B connexe par arcs. Alors, on a la suite exacte longue suivante

$$\cdots \longrightarrow \pi_n(F, x_0) \longrightarrow \pi_n(E, x_0) \xrightarrow{p_*} \pi_n(B, b_0) \longrightarrow \pi_{n-1}(F, x_0) \longrightarrow \cdots \longrightarrow \pi_0(E, x_0) \longrightarrow 0$$

Démonstration. On écrit la suite exacte longue pour la paire (E, F) :

$$\cdots \longrightarrow \pi_n(F, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(E, x_0) \xrightarrow{j_*} \pi_n(E, F, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(F, x_0) \longrightarrow \cdots$$

Par l'isomorphisme p_* vu ci-dessus, on a donc la suite exacte suivante (qui est exacte seulement pour $n \geq 1$)

$$\cdots \longrightarrow \pi_n(F, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(E, x_0) \xrightarrow{j_*} \pi_n(B, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(F, x_0) \longrightarrow \cdots$$

Or, la connexité par arcs de B donne $\pi_0(B) = 0$ et on a aussi la surjectivité de $\pi_0(F, x_0) \rightarrow \pi_0(E, x_0)$ grâce au théorème de relèvement des chemins. $\square$

Remarque 6.19. Cette suite exacte longue est essentielle pour le calcul de plein de groupes d'homotopie, comme on le verra dans le dernier chapitre.

Signalons aussi quelques théorèmes, que je ne démontrerai pas tous, mais dont les preuves se trouvent néanmoins dans [Ha] :

Théorème 6.20 (Hurewicz). *Soit X un espace n -connexe. Alors, $\forall i \leq n$, $H_i(X) = 0$ et, $\pi_{n+1}(X) \simeq H_{n+1}(X)$*

Remarque 6.21. Ce théorème peut être prouvé avec la suite spectrale de Serre, mais nous l'utiliserons juste sans le démontrer

Théorème 6.22 (Approximation cellulaire). *Soit X, Y deux CW complexes, et $f : X \rightarrow Y$. Alors, f est homotope à une application cellulaire (A.25).*

Théorème 6.23 (Whitehead). *Soit $f : X \rightarrow Y$, une application continue entre deux CW complexes. Si f induit des isomorphismes sur tout les groupes d'homotopie, alors f est une équivalence d'homotopie.*

Exemple 6.24. Il ne suffit pas que les groupes d'homotopie soient isomorphes pour que X et Y aient le même type d'homotopie. Par exemple, $X = \mathbb{R}P^2$ et $Y = S^2 \times \mathbb{R}P^\infty$. Les deux sont de groupes fondamentaux $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, comme vu ici : 4.9. De plus, comme ces groupes ont pour revêtements universels S^2 et $S^2 \times S^\infty$, qui ont le même type d'homotopie, alors, d'après 6.17, ces deux espaces ont les mêmes groupes d'homotopie. Or, ils n'ont pas le même type d'homotopie. En effet, ils ont clairement des groupes d'homologie très différents.

Théorème 6.25 (Suspension de Freudenthal). *Soit X un CW complexe qui est $(n-1)$ -connexe. Alors, l'application de suspension*

$$\Sigma_* : \pi_i(X) \rightarrow \pi_{i+1}(\Sigma X)$$

est un isomorphisme pour $i < 2n-1$ et une surjection pour $i = 2n-1$

Corollaire 6.26. *D'après A.13, $\Sigma_* : \pi_i(S^n) \rightarrow \pi_{i+1}(S^{n+1})$ est un isomorphisme pour $i < 2n-1$ et une surjection pour $i = 2n-1$*

On peut donc définir les groupes d'homotopie stables des sphères. D'après 6.25, dans la suite

$$\pi_i(X) \longrightarrow \pi_{i+1}(\Sigma X) \longrightarrow \pi_{i+2}(\Sigma^2 X) \longrightarrow \cdots$$

tout les morphismes finissent, peu importe la valeur de i par être des isomorphismes.

Définition 6.27. Le groupe 'limite' de cette suite est appelé le groupe stable d'homotopie de l'espace X . Il est dénoté $\pi_i^s(X)$

Remarque 6.28. Ce groupe serait pas la colimite du diagramme ci-dessus ? à vérifier

Définition 6.29. Soit G un groupe et n un entier naturel non nul. Un CW complexe X est un espace de Eilenberg MacLane de type $K(G, n)$ si tout ses groupes d'homotopie sont triviaux sauf le n -ième qui est isomorphe à G

Remarque 6.30. $\mathbb{C}P^\infty$ est un $K(\mathbb{Z}, 2)$

Proposition 6.31. $\Omega K(G, n)$ et $K(G, n-1)$ ont le même type d'homotopie

Démonstration. Soit X un $K(G, n)$ et $x_0 \in X$. On considère l'application $p : P(X, x_0) \rightarrow X$, $\gamma \mapsto \gamma(1)$, et soit un diagramme commutatif de la forme :

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{f} & P(X, x_0) \\ i \downarrow & & \downarrow p \\ Y \times [0, 1] & \xrightarrow{H} & X \end{array}$$

Clairement,

$$\begin{aligned} \tilde{H} : Y \times [0, 1] &\rightarrow P(X, x_0) \\ (y, t) &\mapsto \begin{cases} t' \mapsto H(y, tt') & \text{si } t > 0 \\ f(y) & \text{si } t = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

nous donne le fait que p est une fibration, qui a pour fibre $\Omega(X, x_0)$. De plus, $P(X, x_0)$ est contractile, donc d'après 6.18, on a pour tout $i \in \mathbb{N}$, la fibration induit un isomorphisme $\pi_{i+1}(\Omega X) \simeq \pi_i(X)$, donc, d'après 6.23, $\Omega K(G, n)$ et $K(G, n-1)$ ont le même type d'homotopie. □

7 Calcul d'autres groupes d'homotopie d'espaces

On va essayer d'avancer le maximum dans le tableau sur les groupes d'homotopie des sphères.

Lemme 7.1. Soit $i < n$. Alors $\pi_i(S^n) = 0$

Démonstration. Cela suit de 6.22 □

On a donc toute la partie en dessous de la diagonale du tableau des groupes d'homotopie des sphères. Pour avoir la diagonale, on peut faire appel de deux manières différentes. :

Théorème 7.2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors, $\pi_n(S^n) = \mathbb{Z}$

Démonstration. Preuve 1 : On utilise le lemme ci-dessus ainsi que 6.20, ce qui nous donne directement le résultat, car on connaît l'homologie des sphères. □

Démonstration. Preuve 2 : D'après 6.25, on dispose de

$$\pi_1(S^1) \longrightarrow \pi_2(S^2) \longrightarrow \pi_3(S^3) \longrightarrow \pi_4(S^4) \longrightarrow \dots$$

où toutes les applications sont des isomorphismes, sauf la première, dont on ne connaît que la surjectivité. La fibration de Hopf ($S^1 \rightarrow S^3 \rightarrow S^2$), dont je parlerais plus tard, nous donne, d'après 6.18, grâce au fait que $\pi_i(S^3) = 0$ pour $i = 1, 2$, l'isomorphisme $\pi_1(S^1) \cong \pi_2(S^2)$ □

On dispose aussi de :

Lemme 7.3. Soit $n \geq 2$. Alors, $\pi_n(S^1) = 0$

Démonstration. Soit $f : S^2 \rightarrow S^1$. Par simple connexité de S^2 , d'après 3.15, on dispose d'un relèvement $\tilde{f} : S^2 \rightarrow \mathbb{R}$. On peut donc homotoper f à un point dans $\mathbb{R}$, qu'on combine ensuite avec l'application de revêtement pour nous donner le résultat voulu. □

Parlons maintenant de cette fameuse fibration de Hopf :

On sait qu'on dispose d'un revêtement $S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$, ce revêtement étant simplement la projection dans le quotient. Ce revêtement est de fibre S^0 . De même, on dispose du revêtement $S^{2n+1} \rightarrow \mathbb{C}P^n$, où le plan projectif complexe est définie comme le quotient de la boule de $\mathbb{C}^{n+1}$, soit S^{2n+1} , d'après A.21 par la relation d'équivalence $(z_1, \dots, z_{n+1}) \sim \lambda(z_1, \dots, z_n)$, où λ est un complexe de module 1. On dispose donc clairement de la fibration :

$$S^1 \rightarrow S^{2n+1} \rightarrow \mathbb{C}P^n$$

De plus on dispose d'un homéomorphisme $S^2 \rightarrow \mathbb{C}P^1$. On en déduit la fibration de Hopf :

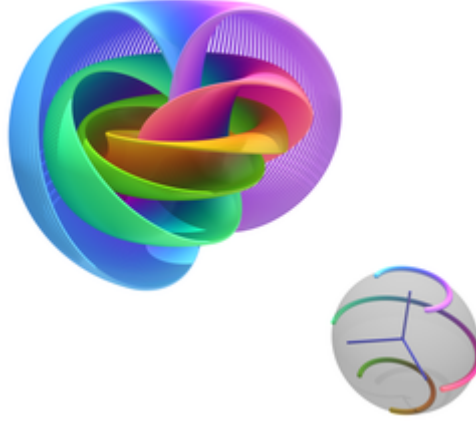
$$S^1 \rightarrow S^3 \rightarrow S^2$$

Demandons nous visuellement à quoi ressemble cette fibration. En regardant S^3 comme la sphère de $\mathbb{C}^2$, et S^2 comme vivant dans $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$ l'application $p : S^3 \rightarrow S^2$ peut être spécifiée comme suit :

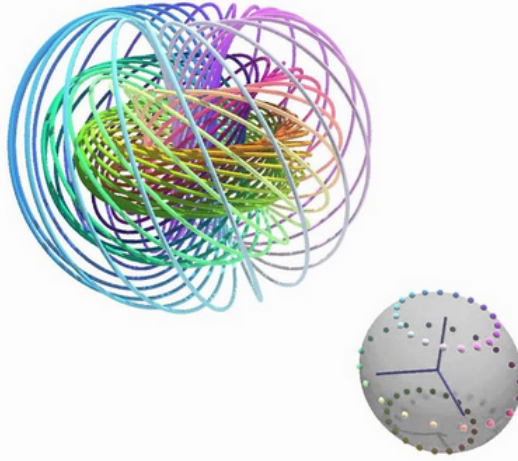
$$p : S^3 \rightarrow S^2$$

$$(z_1, z_2) \mapsto (2z_1\bar{z}_2, |z_1|^2 - |z_2|^2)$$

Lorsqu'on a une fibration $F \rightarrow E \rightarrow B$, l'idée est que E est un recollement de plein de F de la manière de B . Voici une image de la fibration de Hopf :



A chaque point de S^2 , on associe un 'grand cercle'. La réunion de tout ces grands cercles forme S^3 . En effet, on peut voir S^3 comme le recollement de deux tores pleins sur les frontières. En effet, S^3 est le bord de $D^4 = D^2 \times D^2$, qui est $S^1 \times D^2 \cup D^2 \times S^1$. Or on peut voir sur cette image que se dessine les deux tores pleins. Cela se visualise bien avec la vidéo suivante : [Fibration de Hopf](#). Une image plus compréhensible a été pour moi celle la, qui vient de la vidéo ci dessus :



Grâce à cette fibration, on va pouvoir démontrer ceci :

Théorème 7.4. $\pi_3(S^2) = \mathbb{Z}$

Démonstration. Cela suit directement de la suite exacte longue associée à la fibration de Hopf, ainsi que du fait que $\pi_3(S^3) = \mathbb{Z}$ et que $\pi_2(S^1) = 0$ $\square$

Avant de parler du dernier, (et plus difficile, de très loin), calcul de groupe d'homotopie de sphère, démontrons d'abord quelques groupes d'homotopie, pour des espaces connus. Comme toujours, la suite exacte longue des fibrations qu'on associera à ces espaces sera la clé pour le calcul des groupes d'homotopie. On va avoir besoin de plusieurs définitions :

Définition 7.5. Soit $k, n \in \mathbb{N}$. Notons $V_n(\mathbb{R}^k) = \{(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}^k)^n, (x_1, \dots, x_n) \text{ est orthonormal}\}$, appelé variété de Stiefel

Remarque 7.6. Cet ensemble correspond à $\{A \in M_{n,k}(\mathbb{R}), A^T A = I_n\}$

Définition 7.7. Soit $k, n \in \mathbb{N}$. Notons $G_n(\mathbb{R}^k) = \{Vect((x_1, \dots, x_n), (x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}^k)^n)\}$.

Remarque 7.8. On met une topologie sur $V_n(\mathbb{R}^k)$ en la considérant comme sous espace de $(S^{k-1})^n$. Par Gram-Schmidt, on dispose d'une surjection naturelle $p : V_n(\mathbb{R}^k) \rightarrow G_n(\mathbb{R}^k)$ qui envoie un tuple de vecteurs sur l'espace engendré. les fibres sont l'ensemble des vecteurs de dimension n qui forment une base orthonormée d'un espace de dimension n , la fibre est donc $O(n)$. Expliquons rapidement pourquoi p est une fibration. Tout d'abord, $G_n(\mathbb{R}^k)$ est muni de la topologie finale pour p . Soit $P \in G_n(\mathbb{R}^k)$ un espace vectoriel, et U un ouvert autour de P . Soit a tel que $p(a) = P$. Soit $P' \in U$. On peut projeter orthogonalement les vecteurs de a sur P' , et l'on trouve une base non orthonormée de P' , à laquelle on applique Gram-Schmidt. Le processus de Gram-Schmidt ne faisant apparaître que des applications continues, on en déduit qu'on a un homéomorphisme $p^{-1}(U) \rightarrow U \times O(n)$. On a donc une structure de fibré, donc, en particulier, une fibration.

De même, si $m < n \leq k$, on a le fibré suivant :

$$V_{n-m}(\mathbb{R}^{k-m}) \longrightarrow V_n(\mathbb{R}^k) \xrightarrow{p} V_m(\mathbb{R}^k)$$

ce qui, en le spécialisant à $m = 1$ et $k = n$, on a le fibré

$$O(n-1) \longrightarrow O(n) \longrightarrow S^{n-1}$$

cela nous montre que le calcul des groupes d'homotopies des $O(n)$ est au moins aussi dur que celui des sphères, car le second impliquerait le premier, grâce à la suite exacte longue associée à une fibration. Cependant, le fait que la moitié inférieure du tableau pour les groupes d'homotopie des sphères soit remplie de groupes triviaux nous dit que même, grâce

à la suite exacte longue, que l'inclusion $i : O(n-1) \hookrightarrow O(n)$ induit un isomorphisme $i_* : \pi_i(O(n-1), Id) \rightarrow \pi_i(O(n), Id)$ pour $i < n-2$. On connaît néanmoins le fait suivant pour le groupe fondamental :

Théorème 7.9. *Pour $n \geq 3$, $\pi_1(SO_n(\mathbb{R})) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$*

Démonstration. Comme $\pi_1(SO_n(\mathbb{R})) = \pi_1(O(n), Id)$, alors, on en déduit ce résultat d'après 4.10 et ce qui est au dessus. $\square$

On dispose aussi du (gros !) théorème suivant, difficile à démontrer :

Théorème 7.10 (Périodicité de Bott). *On dispose du tableau suivant :*

$i \bmod 8$	0	1	2	3	4	5	6	7
$\pi_i O(n)$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	0	$\mathbb{Z}$	0	0	0	$\mathbb{Z}$

A présent, je vais calculer $\pi_4(S^3)$, ce qui va nécessiter plusieurs définitions ainsi que plusieurs propriétés. Dans cette partie, j'admettrai plusieurs théorèmes et propriétés.

Définition 7.11. Une suite spectrale (cohomologique) est la donnée de $(E_r^{p,q}, d_r)$ où

- $\forall r \in \mathbb{N}^*, q, p \in \mathbb{N}, E_r^{p,q}$ est un groupe abélien.
- $\forall r \in \mathbb{N}^*, d_r : E_r^{p,q} \rightarrow E_r^{p+r, q-r+1}$ sont des morphismes de groupe et vérifient $d_r \circ d_r = 0$
- Ces applications sont appelées des différentielles.
- L'homologie de la r -ième page est la $r+1$ -ième page. C'est-à-dire, que $H(E_r^{p,q}; d_r) = E_{r+1}^{p,q}$.

Remarque 7.12. Les E_r sont appelés les pages

Remarque 7.13. Le fait que $d_r^2 = 0$ nous dit bien que chaque page est composée de plusieurs complexes de chaînes. On peut donc parler d'homologie sans problème.

Remarque 7.14. Il est possible de prendre p et q dans $\mathbb{Z}$, mais on ne le fera pas ici. En fait, pour calculer l'homologie sur les bords de page, on considère que on a p et q dans $\mathbb{Z}$, mais que tout les groupes qui ne sont pas avec $p, q \geq 0$ sont des groupes triviaux.

Visualisons les premières pages d'une suite spectrale : Voici la page 1 :

$$\begin{array}{ccccccc}
 E_1^{0,2} & \longrightarrow & E_1^{1,2} & \longrightarrow & E_1^{2,2} & \longrightarrow & E_1^{3,2} \longrightarrow \dots \\
 & & & & & & \\
 E_1^{0,1} & \longrightarrow & E_1^{1,1} & \longrightarrow & E_1^{2,1} & \longrightarrow & E_1^{3,1} \longrightarrow \dots \\
 & & & & & & \\
 E_1^{0,0} & \longrightarrow & E_1^{1,0} & \longrightarrow & E_1^{2,0} & \longrightarrow & E_1^{3,0} \longrightarrow \dots
 \end{array}$$

Voici la page 2 :

$$\begin{array}{ccccccc}
 E_2^{0,2} & & E_2^{1,2} & & E_2^{2,2} & & E_2^{3,2} & \dots \\
 & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \\
 E_2^{0,1} & & E_2^{1,1} & & E_2^{2,1} & & E_2^{3,1} & \dots \\
 & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \\
 E_2^{0,0} & & E_2^{1,0} & & E_2^{2,0} & & E_2^{3,0} & \dots
 \end{array}$$

Définition 7.15. Si il existe un $r \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $r' \geq r$, $d_{r'} = 0$, alors, $E_r = E_{r+1} = \dots$. Cette page est appelée la page E_∞ . On dit que la suite spectrale **converge** vers un objet H^* si on peut récupérer tout les H^n sur la page E_∞ :

$$H^n = \bigoplus_{p+q=n} E_\infty^{p,q}$$

Dans ce cas, on note $E_2^{p,q} \Rightarrow H^*$

Parlons à présent de la seule suite spectrale que nous allons rencontrer : la suite spectrale de Serre. Par manque de place, nous ne démontrerons pas les propriétés de cette suite spectrale, nous la supposerons déjà construite.

Théorème 7.16. Soit $F \rightarrow E \rightarrow B$ une fibration de Serre. A cette fibration, on associe une suite spectrale, dite suite spectrale de Serre :

$$E_2^{p,q} = H^p(B; H^q(F)) \implies H^*(E)$$

Exemple 7.17. On a vu précédemment qu'on disposait d'une fibration $S^1 \rightarrow S^{2n+1} \rightarrow \mathbb{C}P^n$. Il se trouve qu'on a aussi cette fibration pour $n = \infty$:

$$S^1 \rightarrow S^\infty \rightarrow \mathbb{C}P^\infty$$

où l'on définit S^∞ comme l'union $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} S^n$ où l'on considère $S^i \subset S^{i+1}$.

Essayons de calculer $H^*(\mathbb{C}P^\infty)$:

Remarquons déjà que S^∞ a le type d'homotopie d'un point. En effet, on peut homotoper S^1 à un point dans S^2 , S^i à un point dans S^{i+1} , et, comme on a un nombre dénombrable d'homotopie, on peut définir l'homotopie totale comme l'homotopie entre S^i et un point sur l'intervalle $[1/2^i, 1/2^{i+1}]$. De plus, on connaît la cohomologie de S^1 , donc :

$$E_2^{p,q} = \begin{cases} H^p(\mathbb{C}P^\infty) & \text{si } q = 0, 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

D'après 7.16 cette suite spectrale converge vers $H^*(S^\infty)$. Or, S^∞ a le type d'homotopie d'un point. Donc, le seul élément non trivial de la page E_∞ est $E_\infty^{0,0}$. Visualisons à quoi ressemble la page E_2 :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & & 0 & & 0 & & 0 & \dots \\ & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow \\ \mathbb{Z} & & H^1(\mathbb{C}P^\infty) & \rightarrow & H^2(\mathbb{C}P^\infty) & \rightarrow & H^2(\mathbb{C}P^\infty) & \rightarrow \dots \\ & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow \\ \mathbb{Z} & & H^1(\mathbb{C}P^\infty) & \rightarrow & H^2(\mathbb{C}P^\infty) & \rightarrow & H^3(\mathbb{C}P^\infty) & \rightarrow \dots \end{array}$$

En effet, $H^0 = \mathbb{Z}$ car $\mathbb{C}P^\infty$ est connexe par arcs. De plus, les seules différentielles non triviales sont les $d_2 : E_2^{p,1} \rightarrow E_2^{p+2,0}$. On en déduit aussi, car tout les groupes pour $q \geq 3$ sont triviaux, que $d_3 = 0$ et que donc $E_3 = E_\infty$. Pour avancer, nous allons avoir besoin du fait suivant : $d_2^{0,1} : E_2^{0,1} \rightarrow E_2^{2,0}$ est un isomorphisme. D'après 7.16, $E_3^{0,1} = 0$. Or, $E_3^{0,1} = \frac{\ker d_2^{0,1}}{\text{Im } d_2^{-2,2}}$. Or dans la suite spectrale de Serre, il n'y a pas de groupes d'exposants négatifs, donc $d_2^{-2,2} = 0$, d'où l'injectivité. De même, pour la surjectivité, $E_3^{2,0} = 0$ nous donne la surjectivité. On en déduit que $H^2(\mathbb{C}P^\infty) = \mathbb{Z}$. Ce que nous allons faire à présent est de calculer $E_2^{1,0}$ et utiliser le fait qu'on vient de démontrer pour trouver tout les $E_2^{p,q}$. Dû au placement de $E_2^{1,0}$, on remarque que le complexe de chaîne

$$\dots \longrightarrow E_2^{-1,1} \xrightarrow{d_2} E_2^{1,0} \xrightarrow{d_2} E_2^{3,-1} \longrightarrow \dots$$

on remarque que les d_2 ici sont triviales, et que donc $E_2^{1,0}$ est égale à sa cohomologie, qui est $E_3^{1,0}$, qui est le groupe trivial. De tout ça, on peut en déduire que pour $n \in \mathbb{N}$:

$$H^{2n}(\mathbb{C}P^\infty) \simeq \mathbb{Z}$$

$$H^{2n+1}(\mathbb{C}P^\infty) = 0$$

A présent, soit y un générateur de $E_2^{0,1}$. On a $d_2(y) = x$ est un générateur de $E_2^{2,0}$, car d_2 est un isomorphisme. Donc, xy génère $E_2^{2,1}$ et, comme d_2 est une différentielle, $d_2(xy) = d_2(x)y + d_2(y)x = x^2$ génère $E_2^{4,0}$. Par récurrence, x^n génère $H^{2n}(\mathbb{C}P^\infty)$ et, on en conclut que

$$H^*(\mathbb{C}P^\infty) \simeq \mathbb{Z}[X]$$

.

Il manque plus qu'un théorème avant de commencer le calcul de $\pi_4(S^3)$:

Théorème 7.18. Soit X un espace simplement connexe et n un entier naturel non nul tel que pour tout $0 < k < n$, $H_k(X) = 0$. Alors, il existe une fibration $F \rightarrow X \rightarrow K(\pi_n(X), n)$ telle que

$$\pi_i(F) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \leq n \\ \pi_i(X) & \text{sinon} \end{cases}$$

On en déduit, d'après 6.20, le corollaire suivant :

Corollaire 7.19. $H_{n+1}(F) = \pi_{n+1}(F) = \pi_{n+1}(X)$

On est enfin prêt, on va s'attaquer au gros morceau :

Théorème 7.20. $\pi_4(S^3) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

Démonstration. D'après 7.18, on dispose d'une fibration $F \rightarrow S^3 \rightarrow K(\mathbb{Z}, 3)$. En appliquant le foncteur Ω , d'après le théorème page 409 de [Ha], on dispose de la fibration $\Omega K(\mathbb{Z}, 3) \rightarrow F \rightarrow S^3$. D'après 6.31, on dispose donc, à homotopie près, de la fibration

$$\mathbb{C}P^\infty \rightarrow F \rightarrow S^3$$

Donc, d'après 7.16, on dispose d'une suite spectrale, dont la 2ème page est :

$$E_2^{p,q} = H^p(S^3; H^q(\mathbb{C}P^\infty)) = \begin{cases} H^q(\mathbb{C}P^\infty) & \text{si } p = 0, 3 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

D'après ce qu'on a fait au dessus, on a donc que les seuls groupes non triviaux de la page E_2 sont $E_2^{0,2n}$ et $E_2^{3,2n}$ qui valent $\mathbb{Z}$. On peut donc représenter E_2 :

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{Z} & & 0 & & 0 & & \mathbb{Z} & & 0 & & \dots \\ & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow & \\ 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & \dots \\ & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow & \\ \mathbb{Z} & & 0 & & 0 & & \mathbb{Z} & & 0 & & \dots \\ & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow & \\ 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & \dots \\ & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow & \\ \mathbb{Z} & & 0 & & 0 & & \mathbb{Z} & & 0 & & \dots \end{array}$$

Clairement, $d_2 = 0$. Donc, $E_2 = E_3$. Représentons à présent E_3 :

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{Z} & & 0 & & 0 & & \mathbb{Z} & & 0 & & \dots \\ & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow & \\ 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & \dots \\ & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow & \\ \mathbb{Z} & & 0 & & 0 & & \mathbb{Z} & & 0 & & \dots \\ & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow & \\ 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & \dots \\ & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow & \\ \mathbb{Z} & & 0 & & 0 & & \mathbb{Z} & & 0 & & \dots \end{array}$$

On peut déjà remarquer que, pour $r \geq 4$, toutes les différentielles d_r seront toutes nulles, d'où $E_4 = E_\infty$. Ensuite, d'après le graphique, on remarque que, si x est un générateur de $E_3^{3,0}$ et y de $E_3^{0,2}$, alors, y^n génère $E_3^{0,2n}$ et xy^n génère $E_3^{3,2n}$. De même que pour $\mathbb{C}P^\infty$, on montre que d_3 , la où il nous intéresse, est un isomorphisme, et on en conclut que $d_3(y) = \pm x$. Par propriétés de d_3 , on a donc $d_3(y^n) = \pm nxy^{n-1}$. Soit $z \in \ker d_3^{0,2n}$, clairement, $z = 0$

d'après ce qu'il y a ci dessus, on en déduit alors que $E_4^{0,2n} = 0$. De même, $\ker d_3^{3,2(n-1)} = \mathbb{Z}$ et $\text{Im } d_3^{0,2(n-1)} \simeq n\mathbb{Z}$ d'après ci-dessus. On en déduit donc que $E_4^{3,2(n-1)} \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Voici donc la page E_4 :

$$\begin{array}{ccccccccc}
 0 & & 0 & & 0 & & \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} & & 0 \\
 & \searrow & & & & & & & \\
 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & \searrow & & & & & & & \\
 0 & & 0 & & 0 & & \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} & & 0 \\
 & \searrow & & & & & & & \\
 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & \searrow & & & & & & & \\
 0 & & 0 & & 0 & & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & & 0 \\
 & \searrow & & & & & & & \\
 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & \searrow & & & & & & & \\
 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

Ainsi, d'après 7.16, on a $H^5(F) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Je ne rentre pas dans les détails, mais un théorème qui s'appelle le théorème des coefficients universels en cohomologie nous donne la suite exacte

$$0 \longrightarrow H_4(F) \longrightarrow H^5(F) \longrightarrow \text{Hom}(H_5(F), \mathbb{Z}) \longrightarrow 0$$

De plus, il existe une suite exacte, dite suite exacte de Serre, qui nous donne le fait que $H_5(F) = 0$. Ainsi, on a l'isomorphisme $H_4(F) \simeq H^5(F)$. Donc, d'après 7.19, on a

$$\pi_4(S^3) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

□

Finissons enfin par un théorème de Serre, dont je ne connais pas la démonstration, et qui, apparamment, est plutôt difficile, mais qui nous donne une certaine régularité sur les groupes d'homotopie des sphères.

Théorème 7.21. *Soit $i > n$. Alors, $\pi_i(S^n)$ est un groupe fini sauf pour $\pi_{4k-1}(S^{2k})$*

A Topologie générale

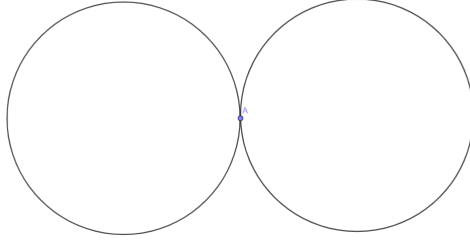
Définition A.1. Soit $A \subset X$ un sous espace topologique de X . Alors, l'espace X/A est l'espace quotient $X/\sim$ où $x \sim y$ si et seulement si $x = y$ ou $x, y \in A$, que l'on munit de sa topologie quotient.

Remarque A.2. Si $f : X \rightarrow Y$ est constante sur A , alors l'application quotient est continue.

Définition A.3. Soit X, Y deux espaces topologiques, et $A \subset Y$. Soit $f : A \rightarrow X$. On note $X \cup_f Y := X \cup Y/(x \sim f(x))$, le **recollement** de X et Y selon f .

Remarque A.4. Si A est un singleton, cela s'appelle un bouquet.

Exemple A.5. Voici un bouquet de deux cercles, noté $S^1 \vee S^1$:

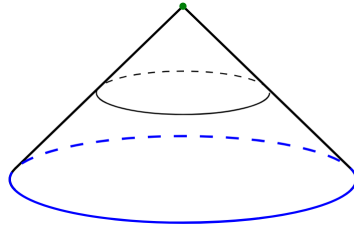


Définition A.6. Le **smash – produit** de deux espaces pointés X et Y est l'espace $X \wedge Y := X \times Y / X \vee Y$.

Remarque A.7. Ici, $X \vee Y$ est vu comme l'ensemble des (x, y) où x est le point base de X ou y est le point base de Y .

Définition A.8. Le **cône** d'un espace X est : $CX := X \times I / X \times \{1\}$

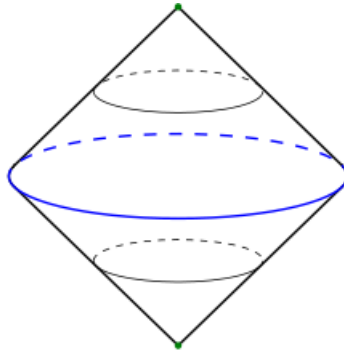
Exemple A.9. Voici un cône de S^1 :



Remarque A.10. Le cône est écrit de cette manière, car il se trouve que C est un foncteur

Définition A.11. La **suspension** d'un espace X est l'espace $\Sigma X := X \times I / (X \times \{0\} \cup X \times \{1\})$

Exemple A.12. Voici la suspension de S^1 :



Proposition A.13. Pour $n \in \mathbb{N}$, on dispose de l'homéomorphisme : $\Sigma S^n \simeq S^{n+1}$

Démonstration. Cela nous est donné par

$$f : \Sigma S^n \rightarrow S^{n+1}$$

$$(x_1, \dots, x_n, t) \mapsto \begin{cases} (0, \dots, 0, 1) & \text{si } t = 1 \\ (0, \dots, 0, -1) & \text{si } t = 0 \\ \frac{(x_1, \dots, x_n, 2t-1)}{\|(x_1, \dots, x_n, 2t-1)\|} & \text{sinon} \end{cases}$$

□

Remarque A.14. On le voit bien sur le graphique ci dessus que $\Sigma S^1 \simeq S^2$.

Définition A.15. Soit G un groupe topologique discret, et X un espace topologique séparé sur lequel G agit continuellement. On dit que G agit de manière proprement discontinue si, pour tout $x, y \in X$ dans deux G orbites différentes, il existe U_x, U_y deux ouverts autour de x et y tels que les orbites de U_x et U_y ne se rencontrent pas

Exemple A.16. L'action par addition de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{R}$ est proprement discontinue.

Définition A.17. Soit G agissant continuellement sur X . Si, $\forall x \in X$, il existe un ouvert U autour de x tel que, $\forall g \in G$, $g \neq 1$, $gU \cap U = \emptyset$, alors on dit que l'action est errante.

Remarque A.18. Une telle action est libre.

Définition A.19. Une action proprement discontinue et errante est dite *une action de revêtement*.

Proposition A.20. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $B^n / \partial B^n = S^n$

Démonstration. Soit

$$f : B^n / \partial B^n \rightarrow S^n$$

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto (2\|x\| - 1, \lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n)$$

où λ , dépendant de x , est choisi de telle manière à ce que ce qui arrive est de norme 1, ici $\lambda := 2\sqrt{\|x\| - \|x\|^2}$. Cette fonction est bien définie, continue, et est d'une injectivité et surjectivité claire. $\square$

Proposition A.21. En notant A la sphère unité de $\mathbb{C}^{n+1}$, on a l'homéomorphisme

$$A \rightarrow S^{2n+1}$$

$$(x_1 + iy_1, \dots, x_{n+1} + iy_{n+1}) \mapsto (x_1, y_1, \dots, x_{n+1}, y_{n+1})$$

Définition A.22. Un **CW complexe** X est la réunion de la donnée d'une suite croissante d'espaces topologiques, notés $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et appelés n -squelettes tels que

- X_0 est un espace discret
- Pour chaque $n > 0$, il existe un ensemble A_n , et pour chaque élément α de A_n , on a une fonction $\phi_\alpha : S^{n-1} \rightarrow X_{n-1}$ telle que $X_n = X_{n-1} \vee_{\phi_\alpha} B_n^\alpha$
- X est muni de la topologie faible : une partie A de X est fermée si et seulement si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A \cap X_n$ est fermée.

Définition A.23. Soit $A \subset X$ un sous CW-complexe. On dit que (X, A) est une paire de CW complexes. De plus, si on dit que $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ est une application de paires de CW-complexes si $f(A) \subset B$

Remarque A.24. Très peu d'espaces ne sont pas des CW complexes. Parmi ceux là, il y a, par exemple, la boucle hawaïenne, voir 3.20

Définition A.25. Soit X, Y deux CW complexes, et $f : X \rightarrow Y$. On dit que f est une application cellulaire si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(X_n) \subset Y_n$.

Cela veut dire que f n'augmente pas les dimensions.

Remarque A.26. Il semble que cette catégorie soit la bonne pour faire de la topologie, en tout cas d'après des personnes qui savent de quoi iels parlent, d'après [Ha]. Un bon argument pour cela est le théorème de Whitehead, qui est exclusif aux CW-complexes.

B Un peu de théorie des catégories

La plupart des notations utilisées ici proviennent de [As]

Définition B.1. Une **catégorie** $\mathcal{C}$ est la donnée de :

- Une classe d'objets, notée $\text{Ob}(\mathcal{C})$
- Pour chaque objets X et Y , un ensemble dit de morphismes, noté $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$
- Pour chaque objets X, Y, Z , d'une application, dite de composition :

$$\circ : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z)$$

- Pour chaque objet X , un morphisme, noté id_X
- tel que :

- la composition soit associative, c'est-à-dire : pour chaque morphismes $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow Z$, $h : Z \rightarrow V$,

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$$

- Si $f : X \rightarrow Y$, alors

$$f \circ id_Y = id_X \circ f = f$$

Remarque B.2. La raison pour laquelle on écrit 'une classe d'objets' et non 'un ensemble d'objets', et que cette 'classe' peut être trop 'grand' pour être un ensemble. Par exemple, la catégorie **Set**, donc les objets sont les ensembles et les morphismes sont les applications d'ensemble, a la 'classe' des objets qui ne forme pas un ensemble. En effet, il n'existe pas d'ensemble de tout les ensembles!

Remarque B.3. Ici, nous considérons que la classe des morphismes est un ensemble. Ce n'est généralement pas le cas, mais ce sera suffisant pour nous. Pour plus de détails nous nous référons à

Remarque B.4. Très vite nous ommetrons la composition et écrirons $f \circ g = fg$

Exemple B.5. Comme exemples de catégories, nous avons **Top**, dont les objets sont les espaces topologiques, et les morphismes les applications continues, ainsi que **hTop**, qui est la *catégorie naïve d'homotopie*, et dont les objets sont les espaces topologiques et les morphismes les classes d'homotopie d'applications continues entre ces objets.

Exemple B.6. On dispose de la catégorie des Groupes, notée **Grp** dont les objets sont les groupes et les morphismes sont les morphismes de groupes. De même, on a **Ab** qui est la catégorie des groupes abéliens et dont les morphismes de groupes sont exactement ceux qui viennent de **Grp**. On dit que **Ab** est une sous-catégorie **pleine** de **Grp** (elle hérite de tout les morphismes de **Grp**, pour chaque groupes abéliens A et B).

Définition B.7. Un **isomorphisme** est un morphisme $f : X \rightarrow Y$ pour lequel il existe un morphisme $g : Y \rightarrow X$ tel que $gf = id_X$ et $fg = id_Y$

Définition B.8. Dans une catégorie $\mathcal{C}$, un objet initial (resp. final) X est un objet pour lequel il existe un unique morphisme de X à Y (resp. de Y à X), pour chaque Y objet de $\mathcal{C}$

Exemple B.9. $\emptyset$ est initial dans **Set** et les singletons sont terminaux dans **Set**

Définition B.10. Un **groupoïde** est une petite catégorie dans laquelle toutes les flèches sont des isomorphismes

Définition B.11. Soit $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ deux catégories. Un **foncteur** (covariant) est la donnée de :
— Pour chaque objet X dans $\mathcal{C}$, d'un objet, noté FX de $\mathcal{D}$
— Pour chaque morphisme $f : X \rightarrow Y$ d'un morphisme $F(f) : FX \rightarrow FY$, parfois noté Ff tels que

- Pour chaque objet X , $F(id_X) = id_{FX}$
- Pour tout morphisme $f : X \rightarrow Y$ et $g : Y \rightarrow Z$, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} FX & \xrightarrow{F(f)} & FY \\ & \searrow F(f \circ g) & \downarrow F(g) \\ & & FZ \end{array}$$

Définition B.12. Un **invariant topologique** est un foncteur F de **Top** dans une catégorie $\mathcal{C}$.

Remarque B.13. Ici, $\mathcal{C}$ sera toujours la catégorie des groupes ou celles des groupes abéliens

Remarque B.14. Dans un théorème, quand celui nous donne l'existence d'un morphisme, on le mettra en pointillé dans le diagramme.

Ce qui est intéressant dans la théorie des catégories, c'est la notion de (co)limite qu'elle développe. Ici, on va en utiliser une version particulière, appelé pushout

Définition B.15. Soit une catégorie $\mathcal{C}$ et un diagramme de la forme

$$\begin{array}{ccc} & & Z \\ & & \uparrow g \\ X & \xleftarrow{f} & Y \end{array}$$

Le **pushout** de ce diagramme est un triplet (P, i_1, i_2) qui fait commuter le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} P & \xleftarrow{i_2} & Z \\ i_1 \uparrow & & \uparrow g \\ X & \xleftarrow{f} & Y \end{array}$$

et tel que, quel que soit (Q, j_1, j_2) , on dispose d'un morphisme Φ , qui fait commuter ce diagramme :

$$\begin{array}{ccccc} & & Q & & \\ & & \nwarrow \Phi & & \\ & & P & \xleftarrow{i_2} & Z \\ j_1 \uparrow & & \uparrow i_1 & & \uparrow g \\ X & \xleftarrow{f} & Y \end{array}$$

Proposition B.16. Soit G_1, G_2 deux groupes. Alors, le pushout de $i_1 : G_1 \cap G_2 \rightarrow G_1$ et $i_2 : G_1 \cap G_2 \rightarrow G_2$ est le groupe

$$G_1 \star G_2 / \langle i_1(g)i_2(g)^{-1} | \forall g \in G_1 \cap G_2 \rangle$$

muni des inclusions.

Remarque B.17. Ce groupe est tout les mots dont les lettres sont dans G_1 ou G_2 , et où l'on a déclaré 'égales' les lettres qui sont 'pareilles' dans G_1 ou dans G_2 .

Lemme B.18 (lemme des 5). Supposons qu'on ait le diagramme suivant dans **Ab**

$$\begin{array}{ccccccccc} A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow & D & \longrightarrow & E \\ \downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow h & & \downarrow i & & \downarrow j \\ A' & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & C' & \longrightarrow & D' & \longrightarrow & E' \end{array}$$

Supposons que ce diagramme soit commutatif, que f, g, i, j soit des isomorphismes, que les deux lignes du diagramme soient exactes, alors, h est un isomorphisme.

Références

- [Ha] A. HATCHER *Algebraic Topology*, Cambridge university press, 2002
- [May] J.P.MAY *A concise course in algebraic topology*, University of Chicago Press, 1999
- [As] I.ASSEM *Introduction au langage catégorique*, Calvage Mounet, 2022
- [Pa] F.PAULIN *Topologie algébrique élémentaire*, Notes de cours
- [Bo] N. BOURBAKI *Topologie algébrique : chapitres 1 à 4* Springer, édition 2016
- [DK] J.F DAVIS, P. KIRK *Lecture notes in Algebraic topology*