

Géométrie hyperbolique et théorème de Poincaré

Maxence Michot, sous supervision de Frank Loray

28 décembre 2025

Table des matières

1 Introduction	1
2 Définitions et premières propriétés en géométrie hyperbolique	1
3 Groupes fuchsien	3
4 Théorème de Poincaré	6

1 Introduction

En géométrie, une question centrale qui se pose depuis Euclide est celle de la validité du 5ème postulat d'Euclide. Est-il un postulat, ou bien est-il possible de le démontrer à partir des 4 autres ? Et que se passerait-il si ce postulat était faux ? A partir du 19ème siècle, des mathématicien-ne-s ont essayé de voir ce qu'il se passait lorsqu'on ne n'assumait pas la validité de ce 5ème postulat. Sans le savoir, iels ont découvert des nouvelles géométries, appelées **Géométries non-euclidiennes**. Dans celles-ci, la somme des angles d'un triangle peut faire quelque chose de différent de 180° . Il y a les **géométries sphériques**, où cette somme fait strictement plus de 180° , et les **géométries hyperboliques**, que nous verrons ici, où la somme des angles d'un triangle fait strictement moins de 180° . Nous donnons 2 modèles du plan hyperbolique, un vu comme le disque unité de \mathbb{C} , l'autre vu comme le demi-plan de Poincaré \mathbb{H} . Nous pouvons ensuite déterminer l'ensemble des isométries de cet espace, qui sera $PSL_2(\mathbb{R})$. Si un groupe discret agit sur une variété lisse (de manière libre et propre), nous pouvons former la variété quotient par cette action. Guidé par cela, nous pouvons former les **Surfaces hyperboliques** qui sont les quotients du plan hyperbolique par un sous-groupe discret de $PSL_2(\mathbb{R})$. Il est donc intéressant de regarder les sous-groupes discrets de $PSL_2(\mathbb{R})$, et nous démontrerons le théorème de Poincaré, qui nous donne, pour tout entier g l'existence d'un sous-groupe discret de $PSL_2(\mathbb{R})$, tel que le quotient par l'action de ce sous-groupe soit une surface de genre g .

2 Définitions et premières propriétés en géométrie hyperbolique

Définition 1. Soit \mathbb{H} le demi-plan de Poincaré. On munit \mathbb{H} de la métrique

$$ds = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{y}$$

On dit que \mathbb{H} muni de cette métrique est un modèle du **plan hyperbolique**. On note ρ la distance associée.

Proposition 2. $PSL_2(\mathbb{R})$ agit sur \mathbb{H} de la manière suivante :

$$PSL_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$$

$$\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, z \right) \mapsto \frac{az + b}{cz + d}$$

Remarque 3. Cette action est propre et libre. Dans la suite, on pourra écrire $T(z)$ pour signifier $T \cdot z$

Théorème 4. $PSL_2(\mathbb{R}) \subset Isom(\mathbb{H})$

Démonstration. Soit $M \in PSL_2(\mathbb{R})$ Tout d'abord, montrons que M est bien un automorphisme de $PSL_2(\mathbb{R})$. L'action à gauche par M est lisse. De plus, si $z \in \mathbb{H}$,

$$\begin{aligned} \text{Im}(M \cdot z) &= \text{Im}\left(\frac{az + b}{cz + d}\right) \\ &= \text{Im}\left(\frac{(az + b)(c\bar{z} + d)}{|cz + d|^2}\right) \\ &= \frac{\text{Im}(adz + cb\bar{z})}{|cz + d|^2} \\ &= \frac{\text{Im}(z)}{|cz + d|^2} \end{aligned}$$

Donc, M envoie bien \mathbb{H} dans \mathbb{H} . On en déduit que M est bien un automorphisme car l'inverse est lisse.

Ensuite, montrons que les éléments de $PSL_2(\mathbb{R})$ sont des isométries. Notons $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$, $z \mapsto M \cdot z$. Un calcul nous donne $f' : z \mapsto \frac{1}{(cz+d)^2}$. Soit $z \in \mathbb{H}$ et $v \in T_z\mathbb{H}$. Alors,

$$\begin{aligned} \|f'(z)v\|_{\mathbb{H}} &= \frac{\|f'(z)v\|_{\text{euclidien}}}{\text{Im}(f(z))} \\ &= \frac{|cz + d|^2 \|v\|_{\text{euclidien}}}{|cz + d|^2 \text{Im}(z)} \\ &= \|v\|_{\mathbb{H}} \end{aligned}$$

Donc, $PSL_2(\mathbb{R}) \subset Isom(\mathbb{H})$

□

Théorème 5. Les géodésiques sont les demi-cercles et les droites tangentes à l'axe réel.

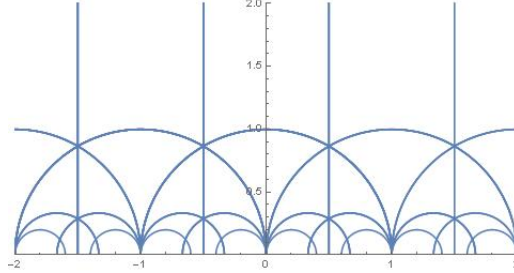
Démonstration. Soit $z_1 = ia, z_2 = ib$ sur l'axe imaginaire pur, de partie imaginaire strictement positive. Soit $\gamma : t \mapsto (x(t) + iy(t))$ un chemin reliant z_1 à z_2 . Alors,

$$l(\gamma) = \int_0^1 \frac{\sqrt{(x'(t))^2 + y'(t)^2}}{y(t)} dt \geq \int_0^1 \frac{y'(t)}{y(t)} dt = \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Or, la distance hyperbolique d'une ligne droite euclidienne allant de z_1 à z_2 est de $\ln\left(\frac{b}{a}\right)$. Si, à présent, z_1 et z_2 sont quelconques dans \mathbb{H} , alors soit L l'unique droite ou demi-cercle orthogonal à l'axe réel

passant par z_1 et z_2 . Alors, comme il existe une transformation de $PSL_2(\mathbb{R})$ envoyant L sur l'axe des imaginaires purs, on en déduit que la géodésique joignant z_1 à z_2 est le segment de L qui les rejoint. \square

Exemple 6. *Voici à quoi ressemblent les géodésiques du plan hyperbolique :*



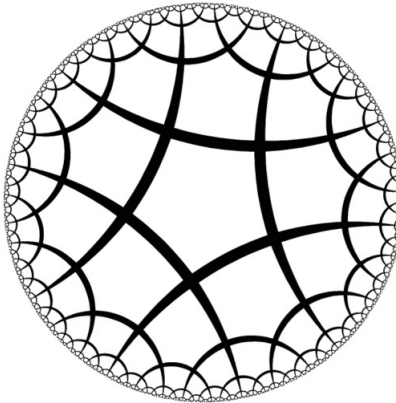
Théorème 7. *Isom(\mathbb{H}) est engendré par $PSL_2(\mathbb{R})$ et $z \mapsto -\bar{z}$. De plus les isométries positives sont exactement $PSL_2(\mathbb{R})$*

Démonstration. Soit ϕ une isométrie de \mathbb{H} . Soit I l'axe imaginaire pur strictement positif. Soit $M \in PSL_2(\mathbb{R})$ qui envoie la géodésique $\phi(I)$ sur I . En appliquant les transformations $z \mapsto k$ ($k > 0$) et $z \mapsto \frac{1}{z}$, on peut supposer que $g\phi$ fixe tout I . Soit $z = x + iy \in \mathbb{H}$ et $u + iv := g\phi(z)$. Alors, $\langle z, it \rangle_{\mathbb{H}} = \langle u + iv, it \rangle_{\mathbb{H}}$. Ainsi,

$$(x^2 + (y - t)^2)v = (u^2 + (v - t)^2)y$$

. Cette égalité étant vraie pour tout $t > 0$, on peut identifier et dire que $v = y$ et $x^2 = u^2$. Donc $g\phi(z) = z$ ou $-\bar{z}$, ce qui conclut. \square

Par l'automorphisme de Cayley, on peut mettre en bijection \mathbb{H} et \mathbb{D} , le disque unité de \mathbb{C} , et de cette manière on transporte la structure hyperbolique sur \mathbb{D} . Le groupe d'isométries (positives) de \mathbb{D} reste $PSL_2(\mathbb{R})$ et les géodésiques sont les suivantes :



3 Groupes fuchsien

Définition 8. *Un **Groupe fuchsien** est un sous-groupe discret de $PSL_2(\mathbb{R})$*

Exemple 9. *Le groupe modulaire $PSL_2(\mathbb{Z})$ est un groupe fuchsien.*

Définition 10. *Soit $T : z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$. On appelle **Trace de T** et on note $Tr(T) := |a + d|$*

Proposition 11. *On peut décomposer les éléments de $PSL_2(\mathbb{R})$ en trois groupes :*

1. Les éléments **elliptiques** sont ceux de trace < 2 . Ceux-ci conjugués à une matrice de rotation R_θ
2. Les éléments **paraboliques** sont ceux de trace $= 2$. Ils sont trigonalisables, avec des 1 sur la diagonale.
3. Les éléments **hyperboliques** sont ceux de trace > 2 . Ils sont diagonalisables, de valeurs propres λ et $\frac{1}{\lambda}$

Démonstration. La preuve se fait en regardant le polynôme caractéristique de la matrice associée. \square

On en déduit la caractérisation suivante :

Proposition 12. *Un groupe monogène hyperbolique ou parabolique est toujours Fuchsien. Un groupe monogène elliptique est Fuchsien si et seulement si il est fini.*

On veut ensuite démontrer que les groupes Fuchsien sont exactement ceux qui agissent de manière proprement discontinue. La difficulté se trouve dans le lemme suivant :

Lemme 13. *Soit $z \in \mathbb{H}$, et K un compact de \mathbb{H} . Alors*

$$\{T \in PSL_2(\mathbb{R}), T(z) \in K\}$$

est compact

Démonstration. Il suffit de montrer que $E = \{T \in SL_2(\mathbb{R}), T(z) \in K\}$ est compact. Cet ensemble est clairement fermé. Comme K est compact, il existe $M_1, M_2 > 0$ tels que pour tout $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} \frac{az + b}{cz + d} &\leq M_1 \\ \text{Im}\left(\frac{az + b}{cz + d}\right) &\geq M_2 \end{aligned}$$

Un calcul sur la seconde inégalité nous donne donc que $|cz + d|^2 M_2 \leq \text{Im}(z)$, et on a donc que a et b sont aussi bornés par la première inégalité. \square

On en déduit le théorème suivant :

Théorème 14. *Soit Γ un sous-groupe de $PSL_2(\mathbb{R})$. Alors, Γ est Fuchsien si, et seulement si, Γ agit de manière proprement discontinue sur \mathbb{H} .*

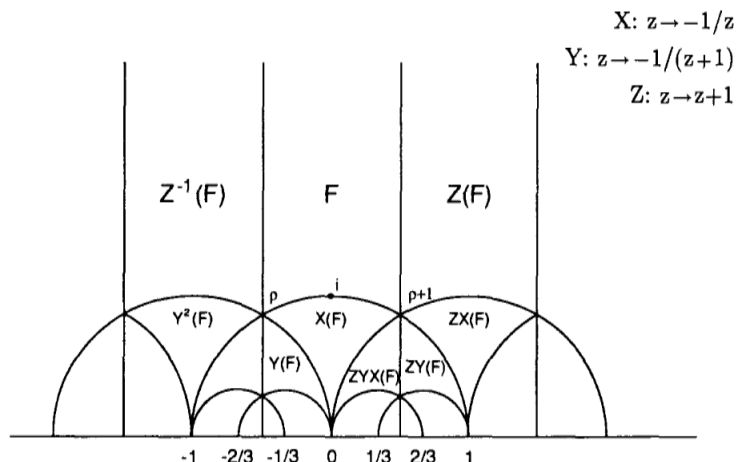
Je vais à présent parler de domaines fondamentaux. Un domaine fondamental pour un groupe Γ est un domaine D de \mathbb{H} tel que les applications de tout les éléments de Γ sur D pavent parfaitement le plan hyperbolique, c'est-à-dire que tout les points de \mathbb{H} sont atteints, et que les seuls chevauchements peuvent se trouver aux bords. Une définition rigoureuse est donnée dans [Ka]. Notre intérêt ici est de construire un 'bon' domaine fondamental pour un groupe Fuchsien Γ . On verra D comme un polygone, et on appellera naturellement 'face' et 'arrête', les objets correspondants.

Définition 15. *Soit Γ un groupe Fuchsien et $p \in \mathbb{H}$. On définit la **région de Dirichelt associée à Γ centrée en p** comme étant :*

$$\begin{aligned} D_p(\Gamma) &= \{z \in \mathbb{H} | \rho(p, z) \leq \rho(T(p), z), \forall T \in \Gamma\} \\ &= \{z \in \mathbb{H} | \rho(p, z) \leq \rho(p, T(z)), \forall T \in \Gamma\} \end{aligned}$$

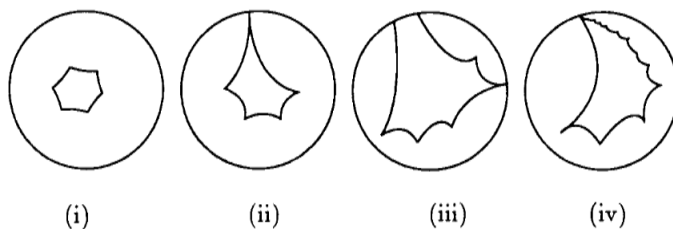
Remarque 16. Si p n'est pas fixé par un élément de $\Gamma \setminus \{Id\}$, $D_p(\Gamma)$ est (hyperboliquement) convexe.

Exemple 17. Voici un exemple de région de Dirichlet pour le groupe modulaire et $p = ki$ ($k > 0$). Ce graphique provient de [Ka].



A présent, nous voyons tout les polygones fondamentaux comme se trouvant dans \mathbb{D} , et non dans \mathbb{H}

Voici des exemples, encore prise dans [Ka], qui montrent à quoi peuvent ressembler ces domaines fondamentaux :



Définition 18. Soit Γ un groupe Fuchsien, et D son polygone de Dirichlet. On dit que deux points $u, v \in \mathbb{D}$ sont **congruents** si ils appartiennent à la même Γ -orbite. Cela forme une relation d'équivalence, et les classes d'équivalences sont appelées **cycles**

Remarque 19. On a les résultats suivants sur les régions de Dirichlet, certains ne nécessitant pas grand chose, d'autres étant plus durs, dont les démonstrations se trouvent dans [Ka] :

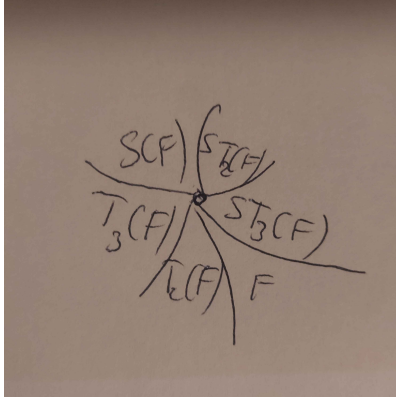
1. Une région de Dirichlet F est localement finie, i.e., sa **tesselation** $\{T(F), T \in \Gamma\}$ est localement finie
2. Soit T_{ii} le sous ensemble de Γ qui envoie les arrêtes de D sur une autre arrête de D . Alors, T_{ii} génère Γ
3. Il y a une bijection entre les cycles elliptiques et les classes de conjugaisons des sous-groupes cycliques de Γ . Les ordres de ces sous-groupes cycliques sont appelées les **périodes** de Γ .
4. Si Γ a des éléments paraboliques, F n'est pas compact.

Le théorème suivant relie la somme des angles à un sommet elliptique avec l'ordre du cycle associé.

Théorème 20. Soit F une région de Dirichlet pour Γ un groupe Fuchsien. Soit $\theta_1, \dots, \theta_n$ les angles internes aux sommets congruents de F dans un cycle. Soit m l'ordre du stabilisateur de Γ à l'un de ces sommets. Alors,

$$\sum_{i=1}^n \theta_i = \frac{2\pi}{m}$$

Démonstration. Soit v_1, \dots, v_n les sommets d'un cycle. D'après 19 3), l'ordre m est bien fini. Soit $H = \{Id, S, \dots, S^{m-1}\}$ le stabilisateur de v_1 . Soit aussi $T_k \in \Gamma$ tel que $T_k(v_k) = v_1$. On veut montrer qu'on a l'image suivante :



Comme T_k est une isométrie, on a bien $n * m$ régions autour de v_1 , avec les $S^r T_k(F)$ ayant un angle θ_k autour de v_1 . Comme D est un polygone fondamental, ces régions ne se chevauchent pas. De plus, si ces régions ne font pas le tour de v_1 , on aurait $T \in \Gamma$ tel que $T(v_k) = v_1$ pour un certain k , et donc $TT_k^{-1} \in H$, d'où T est de la forme $S^r T_k(F)$. Ainsi,

$$\sum_{i=1}^n \theta_i = \frac{2\pi}{m}$$

□

4 Théorème de Poincaré

Ce théorème est connu depuis longtemps, mais une vraie preuve n'en avait jamais été donnée jusqu'à l'article [Ma]. Je vais ici suivre la démonstration qu'il donne de ce théorème, ainsi que l'esquisse de preuve de [Ka].

Lorsqu'on a un groupe Γ qui agit sur l'espace hyperbolique \mathbb{D} , on peut se demander quelle est la structure de l'espace quotient, c'est-à-dire des orbites. Lorsque F est un domaine fondamental localement fini pour Γ , d'après [Be] (théorème 9.2.4), on dispose d'un homéomorphisme entre $\Gamma \backslash \mathbb{D}$ et $\Gamma \backslash F$. Donc, déterminer la structure de l'espace quotient est égal à déterminer la structure du domaine fondamental avec identification des côtés. L'espace $\Gamma \backslash \mathbb{D}$ est aussi un espace topologique, muni d'un genre g .

A partir de maintenant, nous fixons un groupe Fuchsien Γ possédant un domaine fondamental F compact.

Définition 21. Comme F est compact, F possède un nombre fini de côtés, donc de sommets, donc de cycles elliptiques, et on peut donc noter (m_1, \dots, m_r) ses périodes. En notant g le genre de $\Gamma \backslash \mathbb{D}$,

on définit la **signature** de Γ comme étant

$$(g, m_1, \dots, m_r)$$

Le but de ce rapport est donc de démontrer le théorème suivant :

Théorème 22 (Théorème de Poincaré). *Soit $g \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{N}$, m_1, \dots, m_r des entiers supérieurs à 2. Supposons que*

$$(2g - 2) + \sum_{i=1}^r \left(1 - \frac{1}{m_i}\right) > 0$$

Alors, il existe un groupe Fuchsien de signature (g, m_1, \dots, m_r)

Avant de commencer la preuve, je cite ici les quelques résultats annexes que je vais utiliser tout le long de cette preuve :

Théorème 23 (Formule de Gauss-Bonnet). *Soit D un polygone hyperbolique à n côtés, d'angles $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. Alors, ce polygone est d'aire :*

$$\mu(D) = (n - 2)\pi - \sum_{i=1}^n \alpha_i$$

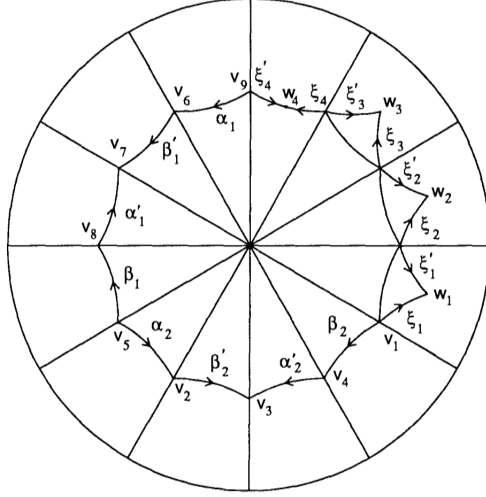
Théorème 24. *Soit (g, m_1, \dots, m_r) la signature de Γ . Alors,*

$$\mu(\Gamma \backslash \mathbb{D}) = 2\pi \left((2g - 2) + \sum_{i=1}^r \left(1 + \frac{1}{m_i}\right) \right)$$

Voici donc une preuve du théorème de Poincaré. L'idée de la preuve est la suivante :

1. On crée un polygone en traçant des rayons depuis 0. Guidés par 24, on utilise le théorème des valeurs intermédiaires pour trouver un polygone D dont l'aire est intéressante.
2. On définit ensuite de manière abstraite le groupe G formé des isométries qui identifient certains côtés de notre polygone
3. On démontre, et c'est à cet endroit que la preuve de Poincaré ne marchait pas (je n'ai pas de source disant ça), que le polygone D est un domaine fondamental pour G

Démonstration. Commençons par dessiner $(4g + r)$ rayons partant de 0, espacés d'angles égaux. Soit $t \in (0, 1)$, et prenons un point à distance (euclidienne) t de l'origine sur chacun des rayons ainsi formés. Rejoignons chacun de ces points par des géodésiques, ce qui nous donne un polygone hyperbolique convexe, noté $M(t)$. Sur les premiers r côtés, dessinons des triangles isocèles externes tels que les angles égaux sont $2\pi/m_1, \dots, 2\pi/m_r$. Voici une figure, pris dans [Ka], de ce à quoi ressemble le polygone ainsi construit.



On note $\alpha_i, \alpha'_i, \beta_i, \beta'_i$ et les ξ_i correspondant aux côtés tels qu'écris sur le dessin.

On veut ensuite calculer l'aire du polygone. Or, l'aire de $M(t)$ est l'aire du polygone régulier à $4g + r$ côtés plus l'aire des r triangles isocèles. L'aire, dans les 2 cas, va se calculer à l'aide du théorème de Gauss-Bonnet. Dans les 2 cas, on ne connaît pas les angles, mais par contre, on voit que les angles tendent vers 0 quand t tend vers 1.

Par continuité de l'aire,

$$\begin{aligned} \mu(M(t)) &\xrightarrow{t \rightarrow 1} (4g + r - 2)\pi + \sum_{i=1}^r \left(\pi - \frac{2\pi}{m_i}\right) \\ &= 2\pi((2g - 1) + \sum_{i=1}^r \left(1 - \frac{1}{m_i}\right)) \end{aligned}$$

Comme $\mu(M(t)) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow 0$, alors, par continuité de l'Aire, par théorème des valeurs intermédiaires, et par l'hypothèse du théorème de Poincaré, soit t_0 tel que $\mu(M(t_0)) = 2\pi((2g - 2) + \sum_{i=1}^r (1 + \frac{1}{m_i}))$

A présent, soit A_i, B_i et X_j des isométries telles que

$$A_i(\alpha'_i) = \alpha_i \quad B_i(\beta'_i) = \beta_i \quad X_j(\xi'_j) = \xi_j$$

Soit G le groupe généré par ces isométries. Remarquons que, pour ce groupe, les $4g + r$ sommets du polygone régulier originel sont dans la même orbite, et que les w_i forment chacun une orbite tout seuls. Soit S la somme des angles aux sommets du polygone régulier originel. On réutilise Gauss-Bonnet, cette fois en connaissant l'aire, et en retrouvant la somme des angles. On trouve ainsi que la somme des angles est $S = 2\pi$. De même, les angles aux w_i valent $2\pi/m_i$.

Donc, pour tout cycle, la valeur de la somme des angles des sommets du cycle est un diviseur de 2π . Gardons cela en tête, cela va être utile pour la dernière partie de la preuve, celle qui est de démontrer que $M(t_0)$ est bien un polygone fondamental pour G . Remarquons tout d'abord que si $M(t_0)$ est bien un polygone fondamental pour G , alors les G -orbites sont discrètes, et donc G est Fuchsien. De plus, G aura pour périodes m_1, \dots, m_r , et son genre h se calcule par la formule d'Euler appliqué à $G \backslash \mathbb{D}$:

$$2 - 2h = (r + 1) - (2g + r) = 2 - 2g$$

D'où $g = h$ et ainsi G est bien un groupe Fuchsien de signature (g, m_1, \dots, m_r) .

Montrons maintenant que $M(t_0)$ est bien un domaine fondamental pour G . Notons $D := M(t_0)$, avec \bar{D} sa cloture topologique. Soit \sim la relation d'équivalence suivante sur $\bar{D} \times G : (z, g) \sim (z', g')$ si $z \in \partial D$ et $gg'^{-1}z = z'$. Soit X l'espace quotient par cette relation d'équivalence et soit D^* le polygone avec les côtés identifiés. Notons $\pi : \bar{D} \rightarrow D^*$ l'application quotient. Posons, sur D^* , la métrique suivante ρ^* :

$$\rho^*(z, z') = \inf_{n \in \mathbb{N}} \sum_{i=1}^n \rho(z_i, z'_i)$$

où $\pi(z_1) = z, \pi(z'_i) = \pi(z_i + 1)$ et $\pi(z'_n) = z'$. Clairement, $\rho^*(\pi(z), \pi(z')) \leq \rho(z, z')$, d'où la continuité de π

Notons $p : X \rightarrow \mathbb{D}$, $(z, g) \mapsto g \cdot z$ et $s : X \rightarrow D^*$ La projection sur \bar{D} suivie de π . Notre but est de montrer que p est un homéomorphisme global, et cela nous donnera directement que D est un polygone fondamental pour G . On le montrera de la manière suivante :

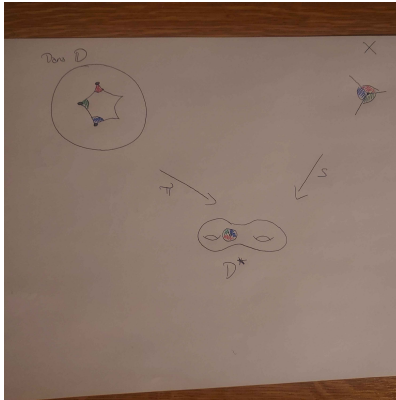
1. Tout d'abord, on montre que p est un homéomorphisme local, et c'est ici que l'on utilisera la condition de cycle.
2. Ensuite, on montre que p est presque un revêtement : on montre que p possède la propriété de relèvement des chemins rectifiables (c'est une sorte de fibration).
3. Finalement, on utilise cette propriété pour montrer la surjectivité et l'injectivité de p .

Démontrons que p est un homéomorphisme local : Soit $z \in \bar{D}$. Nous noterons V_δ le voisinage dans D^* On a trois cas à traiter : 1) Si $z \in D$, alors, il suffit de prendre un voisinage V de z tel que $\rho(V, \partial D)$ est plus grand que le diamètre de V , et on pose $V_\delta = \pi(V)$. 2) Si $z \in \partial D$ mais z n'est pas un sommet. Soit alors s le côté sur lequel est z , et soit $g \in G$ tel que $gs = s'$. Posons $0 < \delta_0 < \rho(z, \partial D \setminus s)$ et $0 < \delta'_0 < \rho(z', \partial D \setminus s')$ et posons $\delta = \frac{1}{4} \min(\delta_0, \delta'_0)$. Posons alors V_0 , resp. V'_0 la boule de rayon δ dans \mathbb{D} autour de z , resp. z' . Posons alors $V_\delta = \pi(V_0 \cap \bar{D}) \cup \pi(V'_0 \cap \bar{D})$

3) Supposons maintenant que z est un sommet du polygone D . Posons $z = z_1, \dots, z_n$ le cycle associé. Pour chaque z_i , soit s_i, s'_i les côtés s'intersectant en z_i . Soit δ_i la distance de z_i à $\partial D \setminus \{s_i \cup s'_i\}$ et soit $0 < \delta < \frac{1}{4} \min(\delta_1, \dots, \delta_n)$. Soit V_i le disque autour de z_i de rayon δ et soit

$$V_\delta = \cup_{i=1}^n \pi(V_i \cap \bar{D})$$

A présent, soit \tilde{V}_δ une composante connexe de $s^{-1}(V_\delta)$. Notre but est de montrer qu'on a l'image suivante, ce qui nous donnera que p est un homéomorphisme local.



Or, d'après la condition de cycle, on a bien un tel dessin (les recollements dans X se passent bien localement). De plus, on a choisi δ tel que $\rho^*(s(x), s(x')) \leq \rho(p(x), p(x'))$

Passons maintenant au relèvement des chemins rectifiables. Soit $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{D}$ un chemin rectifiable, c'est à dire continu et géodésique par morceaux, tel que $\gamma(0) = 0$. Comme p est un homéomorphisme

local, il existe $\epsilon > 0$ tel que $\tilde{\gamma} : [0, \epsilon) \rightarrow X$ relève γ , localement. Si l'on montre qu'on arrive à relever γ en ϵ , alors, on pourra réitérer l'opération. Par compacité de $[0, 1]$, il suffit de réitérer l'opération un nombre fini de fois. Pour simplifier les notations, on a donc le droit de supposer que $\epsilon = 1$. On dispose ainsi de $\tilde{\gamma} : [0, 1) \rightarrow X$, qu'on veut prolonger en 1.

Soit (t_n) une suite telle que $t_n \rightarrow 1$ et telle que les t_n sont assez proches, c'est-à-dire que $s \circ \tilde{\gamma}(t_n)$ et $s \circ \tilde{\gamma}(t_{n+1})$ sont dans un voisinage V_δ décrit précédemment

Pour n, m assez grands, par l'inégalité triangulaire, par l'inégalité ci-dessus, et comme on a déjà relevé γ sur $[0, 1)$,

$$\begin{aligned} \rho^*(s \circ \tilde{\gamma}(t_n), s \circ \tilde{\gamma}(t_m)) &\leq \sum_{i=n}^{m-1} \rho^*(s \circ \tilde{\gamma}(t_i), s \circ \tilde{\gamma}(t_{i+1})) \\ &\leq \sum_{i=n}^{m-1} \rho(p \circ \tilde{\gamma}(t_i), p \circ \tilde{\gamma}(t_{i+1})) \\ &\leq \sum_{i=n}^{m-1} \rho(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})) \end{aligned}$$

Comme γ est rectifiable, on peut supposer, pour n, m assez grands, que les $\gamma(t_i)$ sont sur la même géodésique. Ainsi, le membre de droite de l'inégalité est plus petit qu'un ϵ pour $m \geq n$ assez grands. Donc, $s \circ \tilde{\gamma}(t_n)$ est de Cauchy. Par compacité de D et continuité de π , D^* est compact donc complet. Donc, $s \circ \tilde{\gamma}(t_n)$ tend vers un certain z . Soit V_δ notre voisinage précédent autour de z , et on dispose donc d'un homéomorphisme local entre une composante connexe de $s^{-1}(V_\delta)$ et \mathbb{D} . Ainsi, on peut terminer le relèvement de γ . La propriété de relèvement des chemins rectifiables nous donne directement la surjectivité de p , par connexité par arcs de \mathbb{D} .

Pour l'injectivité, posons, pour $t > 0$, B_t la boule de centre 0 et de rayon t , et

$$\tau = \sup\{t \mid p^{-1} \text{ bien défini sur } B_t\}$$

Supposons $\tau < \infty$. Soit $z \in \partial B_\tau$. Soit L la ligne droite de 0 à B_τ . Alors, L est une géodésique et donc on peut la relever, et donc p^{-1} est bien défini sur \bar{B}_τ . Une application injective sur un compact est injective sur un voisinage de ce compact. Donc, on a une contradiction sur la valeur de τ . Donc, p est injective, d'où le résultat. □

Références

- [Ka] S.KATOK *Fuchsian Groups*, The University of Chicago Press, 1992
- [Ma] B. MASKIT *On Poincaré's Theorem for Fundamental Polygons*, Department of Mathematics, MIT, 1971
- [Be] A. BEARDON *The geometry of discrete groups*, Springer-Verlag, 1983