

RAPPORT DE STAGE
Un invariant de nœud : le polynôme d'Alexander

Mériadec CHUBERRE

17 mai-17 juin 2016

Table des matières

Introduction	3
1 Préliminaires de topologie et de théorie des groupes	4
1.1 Groupe libre, générateurs et relations	4
1.2 Nœuds et topologie associée	5
1.2.1 Quelques notations et définitions	5
1.2.2 Application au nœuds	6
2 Théorème de Reidemeister et calcul pratique du polynôme d'Alexander	8
2.1 Équations de diagramme	10
2.1.1 Index et pointage des régions	10
2.1.2 Mise en équation	11
2.2 Matrice de diagramme	12
3 Deux preuves du caractère invariant du polynôme d'Alexander	14
3.1 Une preuve matricielle	14
3.2 Une preuve par la théorie des groupes	22
3.2.1 Un premier résultat de théorie des groupes	22
3.2.2 Application au groupe du nœud	29
Conclusion	33
Annexes	34
Bibliographie	37

Introduction

La recherche d'invariants occupe une grande place dans la théorie des nœuds ; c'est-à-dire comment déterminer des conditions nécessaires et suffisantes pour savoir si deux nœuds sont équivalents (notion qui sera expliquée par la suite). Il est apparu au cours des différentes recherches effectuées que de telles conditions existent mais sont en pratique très difficiles, voire impossibles, à calculer (c'est le cas par exemple du groupe fondamental d'un nœud dont on reparlera).

L'objet de ce stage a été l'étude d'un article écrit par James Wadell Alexander en 1927. Celui-ci présente certains invariants des nœuds et entrelacs, dont un en particulier qui est appelé *polynôme d'Alexander*. Le polynôme d'Alexander est une condition nécessaire pour que les nœuds soient équivalents mais non suffisante ; en effet, deux nœuds peuvent avoir le même polynôme d'Alexander mais être néanmoins de types différents.

Ce rapport est divisé en deux parties. La première a pour but de décrire le cadre topologique dans lequel s'inscrit la seconde, à savoir le calcul pratique du polynôme d'Alexander ainsi que son caractère invariant. On montrera deux preuves de ce théorème, l'une de manière algorithmique et l'autre s'appuyant sur des éléments de théorie des groupes.

Je remercie Bertrand Patureau pour m'avoir permis d'effectuer ce stage avec lui, ainsi que pour la grande disponibilité qu'il m'a accordée.

Je remercie également l'ensemble des doctorants et chercheurs du LMBA (Laboratoire de Mathématiques de Bretagne Atlantique) à Vannes pour leur accueil chaleureux.

1 Préliminaires de topologie et de théorie des groupes

1.1 Groupe libre, générateurs et relations

Nous allons ici aborder la notion de groupe libre sur un ensemble ainsi que la description de groupes à l'aide de relations existant entre ses différents générateurs. Cette première partie est essentiellement une succession de définitions, de notations et de propositions qui seront utiles ultérieurement.

Dans la suite, X désigne un ensemble indexé par I qui est de même cardinal que X , on notera $X = (x_i)_{i \in I}$. On considérera de la même manière $X^{-1} = (x_i^{-1})_{i \in I}$ un ensemble qui sera équipotent à X .

Définition 1.1 On a les définitions ci-après.

- On appelle mot sur $X \cup X^{-1}$ toute suite finie d'éléments de $X \cup X^{-1}$; si un entier n désigne le nombre de termes non nuls de termes de cette suite, alors on dira que le mot est de longueur (ou) de taille n . On note $(X \cup X^{-1})$ l'ensemble des mots sur $X \cup X^{-1}$.
- Soit $u = x_{i_1} \dots x_{i_n}$ et $\tilde{u} = x_{j_1} \dots x_{j_m}$ deux mots de $(X \cup X^{-1})$. On définit le produit $u\tilde{u} = x_{i_1} \dots x_{i_n} x_{j_1} \dots x_{j_m}$. On définit l'unique mot de longueur nulle, noté 1 (il correspond à la suite vide de $(X \cup X^{-1})$), tel que pour tout mot de $(X \cup X^{-1})$ on a $u1 = 1u = u$.
- On dira que deux mots sont adjacents s'il existe t_1, t_2 et a trois éléments de $(X \cup X^{-1})$ tels que :

$$u = t_1 t_2 \text{ et } \tilde{u} = t_1 a a^{-1} t_2$$

ou alors :

$$\tilde{u} = t_1 t_2 \text{ et } u = t_1 a a^{-1} t_2.$$

On note alors $u \mathcal{A} v$.

- On définit sur $(X \cup X^{-1})$ la relation \mathcal{R} de la manière suivante : si u et v sont deux mots de $(X \cup X^{-1})$, alors on a $u \mathcal{R} v$ si par définition on a une suite finie $t_1 \dots t_n$ de $(X \cup X^{-1})$ telle que :

$$\begin{aligned} u &= t_1 \\ v &= t_n \\ t_i \mathcal{A} t_{i+1}, \forall i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket \end{aligned}$$

Remarque 1.1 Muni de la loi de composition interne qui consiste à effectuer le produit de deux mots, $(X \cup X^{-1})$ est un monoïde.

Proposition 1.1 La relation \mathcal{R} définie ci-dessus est une relation d'équivalence sur le monoïde $(X \cup X^{-1})$ compatible avec la loi produit, et le quotient $(X \cup X^{-1})$ par \mathcal{R} , noté $[X \cup X^{-1}]$, est un groupe.

Remarque 1.2 Si x appartient à X et est vu comme un élément de $(X \cup X^{-1})$, alors l'inverse de sa classe dans $[X \cup X^{-1}]$ est celle de x^{-1} . Il suffit de voir que l'on a $xx^{-1} \mathcal{R} 1$.

Définition 1.2 Soit G un groupe. On dira que G est libre sur X s'il est engendré par X et isomorphe au groupe $[X \cup X^{-1}]$.

Définition 1.3 On dira que $u = a_1 \dots a_n \in (X \cup X^{-1})$ est réduit si on a pour tout $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ $a_i \neq a_{i+1}^{-1}$.

Théorème 1.1 *Chaque classe d'équivalence de $(X \cup X^{-1})$ pour \mathcal{R} contient un et un seul mot réduit.*

Le théorème ci-dessus nous donne donc que l'ensemble des mots réduits de $(X \cup X^{-1})$, que l'on notera F_X , est un ensemble de représentants des classes d'équivalences de \mathcal{R} distincts.

Remarque 1.3 *F_X peut être vu comme un groupe libre sur X pour la loi de composition interne qui à u et v associe l'unique mot réduit de la classe de uv .*

Avec les définitions et théorèmes énoncés plus haut, nous allons maintenant aborder les notions qui seront directement utiles pour la suite de ce rapport et pour présenter ce qu'on appellera le *groupe fondamental d'un nœud*.

Définition 1.4 *Soit G un groupe engendré par X vérifiant un ensemble de relations $\{r_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$. En notant (R) le sous-groupe normal de F_X engendré par $R = \{r_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$, on dit que $(X|R)$ est une présentation de G si G est isomorphe à $F_X/(R)$. Si en plus X et R sont finis, alors on dit que G est de présentation finie.*

Proposition 1.2 *On note pour tout groupe G , $D(G)$ le sous groupe de G engendré par ses commutateurs. Si G est de présentation $(X | [x, y]; (x, y) \in (X \cup X^{-1})^2)$, alors c'est un groupe abélien libre sur X et isomorphe à $F_X/D(F_X)$, on l'appelle l'abélianisé de G . Plus généralement, si G admet $(X | R)$, son abélianisé admet la présentation $(X | R \cup \{[x, y] : x, y \in X\})$*

1.2 Nœuds et topologie associée

Nous allons dans cette section aborder la notion de nœuds et définir la topologie qu'on leur associe. C'est dans ce cadre que seront démontrés les principaux résultats, et justifiées les méthodes utilisées dans cette étude.

1.2.1 Quelques notations et définitions

On considérera dans toute la suite X et Y des espaces topologiques. On adoptera les notations suivantes :

$$\begin{cases} H_0(X) \text{ l'ensemble des composantes connexes par arcs de } X \text{ muni de sa topologie.} \\ \Pi_1(X, x_0) \text{ son groupe fondamental défini après.} \end{cases}$$

Groupe fondamental sur un espace topologique

Construction

Définition 1.5 *Soit x_0 un élément de X . On appelle lacet sur l'espace topologique pointé (X, x_0) toute application continue de la forme :*

$$\gamma: \begin{array}{l} [0; 1] \longrightarrow (X, x_0) \\ t \longrightarrow \gamma(t) \end{array}$$

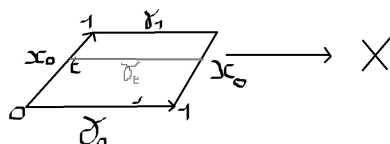
telle que $\gamma(0) = \gamma(1) = x_0$.

On note alors $\Omega(X, x_0)$ l'ensemble des lacets sur (X, x_0) .

Définition 1.6 On dit que deux lacets γ_1 et γ_2 sont homotopes s'il existe une application continue :

$$\gamma: \begin{array}{l} [0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow (X, x_0) \\ (t, s) \longrightarrow \gamma_t(s) \end{array}$$

telle que $\gamma_0(\cdot) = \gamma_0$ et $\gamma_1(\cdot) = \gamma_1$. De plus, pour tout t , γ_t est un lacet c'est-à-dire que pour tout t , $\gamma_t(0) = \gamma_t(1) = x_0$. On note alors $\gamma_1 \sim \gamma_0$.



On note alors $\Pi_1(X, x_0) = (\Omega(X, x_0) / \sim)$ le groupe fondamental de l'espace pointé. C'est en effet un groupe pour l'opération consistant à concaténer les chemins, évidemment, à une homotopie près. On montre que la classe d'équivalence de la concaténation de deux chemins ne dépend pas des chemins choisis au sein d'une même classe. C'est à dire si γ_1 et $\widehat{\gamma}_1$ sont dans une certaine classe et que γ_2 et $\widehat{\gamma}_2$ sont dans une autre classe, alors $\gamma_1 \cdot \gamma_2$ et $\widehat{\gamma}_1 \cdot \widehat{\gamma}_2$ sont dans la même classe d'homotopie.

Proposition 1.3 $\Pi_1(X, x_0) = (\Omega(X, x_0) / \sim)$ est un groupe pour l'opération de concaténation de deux représentants d'une même classe d'homotopie.

1.2.2 Application aux nœuds

Nous allons maintenant énoncer quelques définitions et propriétés relatives aux nœuds, qui permettront de justifier et de comprendre les différents raisonnements qui suivront dans la deuxième partie.

Définition 1.7 On appellera ici un nœud une application continue et injective -que l'on prendra ici linéaire par morceaux-, de la forme :

$$K: \begin{array}{l} \mathcal{S}^1 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ x \longrightarrow K(x) \end{array} .$$

\mathcal{S}^1 désigne le cercle unité. Il faut voir un nœud comme le plongement du cercle unité dans \mathbb{R}^3 .

Définition 1.8 On appellera de la même manière un entrelacs une application que l'on prendra aussi linéaire par morceaux de la forme :

$$K: \begin{array}{l} \prod_{i=1}^n \mathcal{S}^1 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ x \longrightarrow K(x) \end{array} .$$

$\prod_{i=1}^n \mathcal{S}^1$ désigne un produit disjoint de cercles unités au sens de structures topologiques. Il faut voir un entrelacs comme plusieurs nœuds, entrelacés dans l'espace, qui ne se "touchent" pas.

Pour avoir une représentation un peu plus visuelle de ce qu'est un nœud, en voici un exemple ; il faut vraiment interpréter le mot "nœud" au sens usuel du terme.



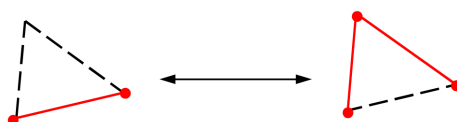
Définition 1.9 On dira que deux nœuds K_1 et K_2 sont isotopes si on a un chemin de la forme

$$K: \begin{array}{l} [0, 1] \times \mathcal{S}^1 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (t, x) \longrightarrow K_t(x) \end{array}$$

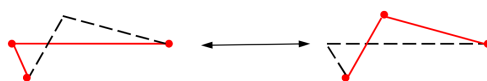
tel que $K_0(\cdot) = K_0$, $K_1(\cdot) = K_1$ et que K_t soit linéaire par morceaux, c'est à dire que le graphe du nœud dans \mathbb{R}^3 est une succession de lignes brisées.

On dira que deux nœuds sont du même type s'ils appartiennent à la même classe d'isotopie, c'est à dire si on peut en déformer un de façon continue pour aboutir à l'autre. Pour simplifier les raisonnements on ne considérera les nœuds ici que sous la forme linéaire par morceaux. Cela ne remet pas en cause les résultats qui suivront dans le cas général, de même, "passer d'un nœud à l'autre" en restant dans la même classe d'isotopie reviendra à effectuer une succession finie des opérations suivantes.

- On considère un triangle inclus dans le complémentaire du nœud avec une arête appartenant à celui-ci. Alors on peut transformer cette arête en les deux autres. On peut aussi effectuer le processus inverse, considérer le triangle avec deux arêtes appartenant aux nœud et les transformer en l'autre :



- On peut déplacer de manière continue un sommet le long d'une des deux arêtes qu'il sépare :



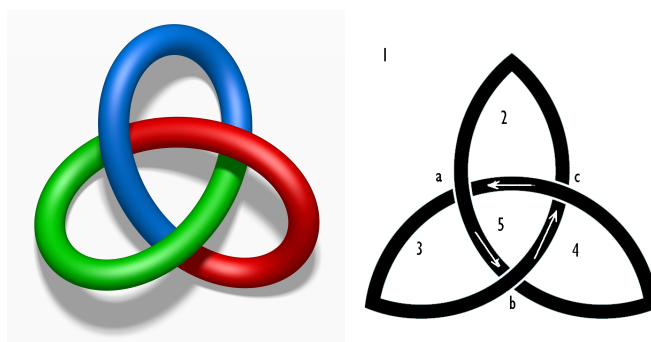
Effectuer ces opérations sur un nœud revient en effet à le modifier de manière isotope en un autre nœud. Par la suite on opérera sur les nœuds uniquement de cette manière.

Nous allons maintenant parler de *diagramme associé à un nœud*, et c'est avec ces diagrammes que nous allons pouvoir calculer le polynôme d'Alexander. Le principe du diagramme d'un nœud est simple : imaginez que l'on éclaire un nœud par dessus, alors le diagramme sera l'ombre observée.

On peut définir le (ou plus précisément un) diagramme d'un nœud de la manière suivante.

Définition 1.10 *On appellera diagramme associé à un nœud une projection régulière du nœud sur le plan, avec comme informations supplémentaires : lorsque que deux arêtes du diagramme se croisent, on sait laquelle des deux est au-dessus de l'autre dans l'espace. De plus on sait dans quel sens on parcourt le nœud.*

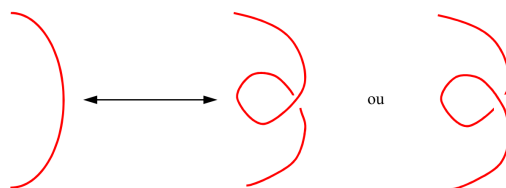
Exemple 1 *La représentation du nœud de trèfle dans l'espace et son diagramme.*



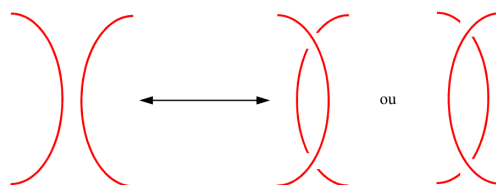
2 Théorème de Reidemeister et calcul pratique du polynôme d'Alexander

On appliquera sur le diagramme d'un nœud les modifications suivantes, appelées *mouvements de Reidmeister*, définies comme telles :

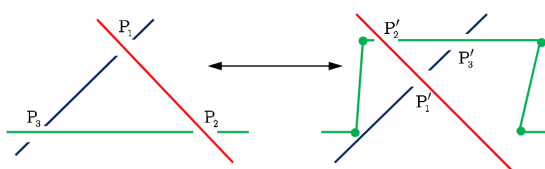
- mouvement de Reidemeister de type 1 :



— mouvement de Reidemeister de type 2 :



— mouvement de Reidemeister de type 3 :



De la même manière que pour les nœuds ces mouvements reviennent à modifier la combinatoire du diagramme, c'est à dire le nombre de points de croisement et l'agencement des arêtes les unes par rapport aux autres sans en changer le type. Cela conduit à l'énoncé du théorème de Reidemeister.

Théorème 2.1 *Théorème de Reidemeister* Deux nœuds sont du même type **si et seulement si** il existe une succession finie de mouvements de Reidemeister permettant d'obtenir le diagramme de l'un à partir de celui de l'autre.

Preuve : La preuve de ce théorème reposant sur des théorèmes et des notions qui dépassent le cadre de cette étude, ce théorème sera admis.

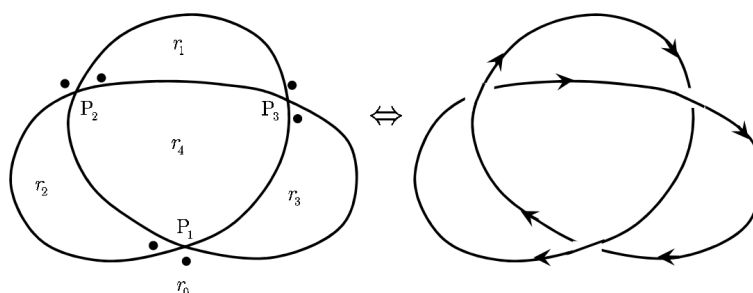
2.1 Équations de diagramme

Nous allons dans cette partie donner la méthode pratique pour calculer le polynôme d'Alexander à partir du diagramme d'un nœud. Elle pourra paraître déroutante car, à première vue, on ne voit pas forcément pourquoi elle fonctionne si bien. La justification de cette méthode apparaîtra lors de l'étude plus précise du groupe d'un nœud. On utilisera tout au long des calculs, afin de servir d'exemple, le nœud de trèfle qui est représenté dans **Exemple 1**.

2.1.1 Index et pointage des régions

Lorsque l'on a le diagramme d'un nœud, il s'agit tout d'abord de l'orienter, c'est à dire, en s'imaginant marcher le long du diagramme : savoir dans quel sens le parcourir, et arrivé à un point de croisement, savoir quelle est l'arête du dessus et quelle est celle du dessous. Nous allons adopter les notations d'Alexander ; elles ne sont pas forcément très visuelles mais seront pratiques pour les calculs qui suivront.

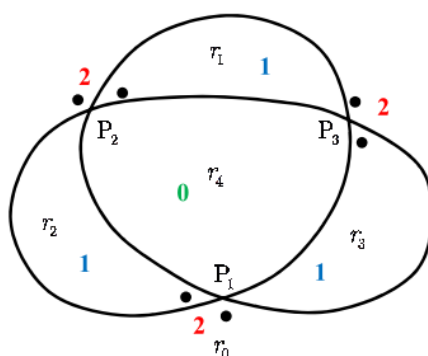
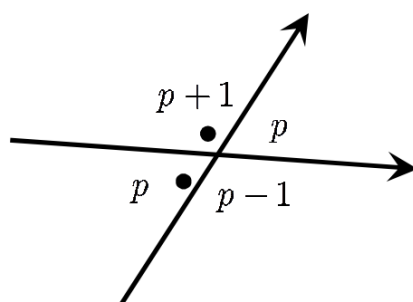
À chaque croisement du diagramme, on adoptera la notation suivante : deux régions consécutives vont être pointées au niveau de chaque croisement, de telle sorte que si on se déplace sur l'arête passant "en dessous", on ait les deux régions pointées sur notre gauche.



Il faut noter que dans le cas d'un nœud simple, il suffit d'orienter un point de croisement du nœud pour avoir l'orientation complète de celui-ci et de son diagramme en suivant l'arête orientée comme telle. Pour un entrelacs il sera nécessaire d'orienter une arête de chaque composante.

Il s'agit maintenant de donner ce qu'on appellera un *index* (un entier relatif) aux différentes régions du diagramme de la manière suivante : on choisit une région au hasard à laquelle on attribue l'index 0 ; ensuite, les régions devront être indexées de façon à ce que lorsque l'on passe d'une région à une autre en traversant une arête de droite à gauche,

orientation déterminée par celle de l'arête, on baisse d'un index.



Il s'agit de s'assurer qu'une telle action ne donne pas lieu à ce qu'une région se retrouve avec deux index différents, la démonstration se fera grâce à la théorie des groupes dans la partie suivante. On s'aperçoit qu'à chaque croisement il y a deux régions d'un même index p , on dira alors que le croisement est d'index p .

2.1.2 Mise en équation

Nous allons maintenant passer aux équations de diagramme à proprement parler. On se placera ici dans le cadre de nœud simple, c'est à dire que nous n'étudierons pas des entrelacs ou des nœuds qui ne sont pas disjoints. Tout d'abord, notons que le diagramme d'un nœud peut être vu comme un polyèdre. En effet, nous avons dit qu'un nœud est ici une application linéaire par morceaux. La représentation de son diagramme sera donc une succession de lignes brisées dans le plan. Montrons d'abord le résultat suivant.

Proposition 2.1 *Soit n un entier et un diagramme de nœuds à n points de croisement. Alors le diagramme délimite exactement $n + 2$ régions du plan.*

Preuve : La formule d'Euler pour les polyèdres donne que le nombre de sommets s , de faces f et d'arêtes a vérifient la relation : $s - a + f = 2$.

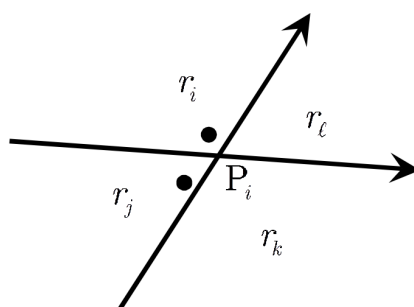
En regardant le diagramme comme un graphe non orienté dont les sommets sont les points de croisement, on s'aperçoit qu'on a : $a = 2s$. En effet, de chaque point de croisement, il y a 4 arêtes qui en partent. Chaque arête étant comptée 2 fois, à chacun de ses sommets, on a :

$a = \frac{1}{2}(4s)$. Donc on a finalement : $-s + f = 2$. D'où le résultat. \square

Soit donc un diagramme à n points de croisement, annoté et avec les régions indexées comme décrit ci-dessus. On note $(p_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ les points de croisement et $(r_i)_{i \in \llbracket 1, n+2 \rrbracket}$ les régions.

Soit p_i un point de croisement entouré des régions r_i, r_j, r_k, r_l . On va maintenant "tourner" autour du point dans le sens des aiguilles d'une montre en commençant par une des deux régions pointées de manière à ce que la deuxième région visitée soit elle aussi pointée.

Dans le cas de la figure ci-après :



on pose ainsi la relation :

$$p_i(r) = xr_i - xr_j + r_k - r_l = 0. \quad (1)$$

On obtient, en considérant le nœud de trèfle, le système :

$$\begin{aligned} p_1(r) &= xr_2 - xr_0 + r_3 - r_4 = 0 \\ p_2(r) &= xr_1 - xr_0 + r_2 - r_4 = 0 \\ p_3(r) &= xr_3 - xr_0 + r_1 - r_4 = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

2.2 Matrice de diagramme

À partir de (1) on définit la matrice du diagramme de la manière suivante.

La matrice possède autant de colonnes que de régions et autant de lignes que de points de croisements. Le coefficient en position (i, j) sera alors :

$$\begin{cases} \pm x \text{ si } \pm xr_j \text{ apparaît dans } p_i(r) \\ \pm 1 \text{ si } \pm r_j \text{ apparaît dans } p_i(r) \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

On identifiera par la suite les colonnes de la matrice aux régions qu'elles représentent lorsque le cadre sera clair ; r_i représentera la i ème colonne de la matrice ainsi que la i ème région.

Dans le cas du nœud de trèfle, la matrice associée au diagramme est la suivante :

$$M = \begin{pmatrix} -x & 0 & x & 1 & -1 \\ -x & x & 1 & 0 & -1 \\ -x & 1 & 0 & x & -1 \end{pmatrix}$$

Nous allons maintenant passer au calcul du polynôme d'Alexander à partir des matrices de diagrammes. Voici une première proposition.

Proposition 2.2 *Soit M la matrice du diagramme d'un nœud, alors les matrices M_p , obtenues en supprimant de M deux colonnes correspondant à deux régions d'index p et $p+1$, ont leurs déterminants qui ne diffèrent que d'un facteur $\pm x^n$ avec n un entier relatif.*

Remarque 2.1 *La matrice M_p n'est pas unique, elle dépend des colonnes choisies pour l'obtenir.*

Preuve :

Afin d'alléger les notations, on se placera ici dans le cas où les index sont positifs. Ceux-ci étant déterminés à une constante additive près, la preuve qui suit s'applique tout aussi bien dans le cas général. Soit r un entier naturel et $[[0; r]]$ l'ensemble des valeurs prises par les index des régions du diagramme. On a de manière évidente d'après (1) et la définition de M que

$$\sum_{k=0}^{n+1} r_k = 0.$$

On utilisera le lemme suivant dont la démonstration est en annexe (car elle n'apporte rien ici) :

Lemme 2.1 *On a $\sum_{k=0}^{n+1} x^{-p(r_k)} r_k = 0$, où $p(r_k)$ désigne l'index de r_k .*

On en déduit au passage que pour tout élément s de $[[1; r]]$, on a par une multiplication de la relation précédente :

$$\sum_{k=0}^{n+1} x^{s-p(r_k)} r_k = 0. \quad (3)$$

On a donc en soustrayant ces deux relations que pour tout $s \in [[1; r]]$: $\sum_{k=0}^{n+1} (x^{s-p(r_k)} - 1) r_k = 0$.

Soit $(s, p, q) \in [[1; r]]^3$. On indicera pour des soucis de notations r_p, r_q , et r_s trois régions d'index p, q et s .

On note alors en colonnes $M_{p,q}$ la matrice obtenue en supprimant de M les colonnes r_p et r_q : $M_{p,q} = (r_1, \dots, r_{n+1}) \setminus (r_p, r_q)$.

On remplace dans $M_{p,q}$ la colonne r_s par (3). On a donc que le déterminant de la matrice obtenue est nul du fait de l'ajout d'une colonne de 0 ; Remarquons que dans (3) il n'y a pas de colonnes d'index s car $(x^{s-s} - 1) = 0$. On développe alors l'expression

$$|r_1 \dots \sum_{k=0}^{n+1} (x^{s-p(r_k)} - 1) r_k \dots r_{n+1}|.$$

On obtient donc :

$$\begin{aligned} |r_1 \dots \sum_{k=0}^{n+1} (x^{s-p(r_k)} - 1) r_k \dots r_r| &= \sum_{k=0}^{n+1} (x^{s-p(r_k)} - 1) |r_1 \dots r_k \dots r_{n+1}| \\ &= 0. \end{aligned}$$

Chaque terme de cette somme est nul car il y a répétition de chaque colonne de $M_{p,q}$ mises à part r_p et r_q . On obtient alors :

$$(x^{s-p} - 1) |r_1 \dots r_p \dots r_{n+1}| + (x^{s-q} - 1) |r_1 \dots r_q \dots r_{n+1}| = 0.$$

Or le premier terme est exactement $(x^{s-p} - 1) \Delta_{s,q}$ et le deuxième terme est exactement $(x^{s-q} - 1) \Delta_{s,p}$. On a donc :

$$(x^{s-p} - 1) \Delta_{s,q} = -(x^{s-q} - 1) \Delta_{s,p}.$$

Ces trois indices ayant été choisis quelconques, on en déduit aisément que pour tout quadruplet (p, q, s, t) de $[[1, r]]$ on a :

$$\Delta_{t,p} = \pm \frac{x^{q-t}(x^{t-p} - 1)}{x^{q-s} - 1} \Delta_{q,s}.$$

Pour $p = t + 1$ et $s = q + 1$ on a le résultat demandé. \square

On a donc pour tout $p \in [[1, r]]$ une relation du type $\Delta_{p,p+1} = \pm x^n \Delta(x)$, où $\Delta(x)$ est le facteur commun à tous les $\Delta_{p,p+1}$, $p \in [[1, r]]$ de plus haut degré qui ne soit pas de la forme $\pm x^n$.

Ce polynôme est le polynôme d'Alexander. Après l'avoir calculé nous allons maintenant donner deux preuves de son caractère d'invariant de nœud. La première sera issue du calcul matriciel à partir des matrices de diagramme, et la seconde sera issue de la théorie des groupes, cette dernière donnera une justification de la méthode de calcul précédente qui peut sembler à première vue une "formule magique".

3 Deux preuves du caractère invariant du polynôme d'Alexander

3.1 Une preuve matricielle

Nous avons vu que le théorème de Reidemeister nous disait que deux nœuds sont du même type (c'est à dire dans la même classe d'homotopie) si et seulement si le diagramme de l'un peut être déformé en le diagramme de l'autre avec une succession finie de mouvements de Reidemeister. Il suffit donc de regarder la modification qu'entraînent ces mouvements sur les matrices de diagramme et voir que le polynôme d'Alexander est conservé après un nombre fini de ces mouvements.

Définition 3.1 *On dira que deux matrices sont ϵ -équivalentes si on peut transformer l'une en l'autre avec une succession finie des mouvements suivants :*

- α) *Intervertir deux lignes ou deux colonnes.*
- β) *Multiplier une ligne ou une colonne par ± 1 .*
- γ) *Additionner à une ligne (colonne) une combinaison linéaire entière de lignes (colonnes).*

δ) Ajouter à la matrice une ligne et une colonne de zéros avec un 1 pour leur coefficient commun :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & M & \\ 0 & & & \end{pmatrix}.$$

ε) Multiplier une colonne par $\pm x^n$ avec n un entier relatif.

Remarque 3.1 On remarque que modifier une matrice à l'aide de γ , β , α et ϵ revient à la multiplier à gauche et à droite par des matrices de $GL_n(\mathbb{Z}[x, x^{-1}])$. Deux matrices de même taille ϵ -équivalentes seront donc équivalentes (c'est à dire sans avoir effectué l'opération δ).

Nous allons montrer quelque chose de plus fort ici que la simple invariance du polynôme d'Alexander. Nous allons montrer que la classe d' ϵ -équivalence d'une matrice de diagramme ne dépend que du nœud considéré, c'est à dire :

- Soit M est une matrice de diagramme. Si p est un index de régions, alors M_p et M_{p-1} sont ϵ -équivalentes. Ainsi, on obtient que quels que soient les index p et q considérés M_p et M_q sont ϵ -équivalentes.
- si deux nœuds sont du même type, alors leurs matrices de diagramme, dont on a supprimé deux colonnes d'index consécutifs sont ϵ -équivalentes.

Montrons tout d'abord la proposition suivante.

Proposition 3.1 Deux matrices carrées ϵ -équivalentes ont même déterminant à un facteur $\pm x^n$. Cette proposition sera généralisée plus tard dans le théorème 4.2.

Preuve :

Les opérations α , β et ϵ modifient le déterminant de la matrice d'un facteur ± 1 ou $\pm x^n$.

Supposons que M ait subi l'opération δ . Alors, en développant son déterminant, on voit qu'elle a exactement le même déterminant que M .

L'opération γ , quant à elle, ne modifie pas le déterminant d'une matrice \square

Prouvons maintenant que si M est une matrice de diagramme, alors M_p et M_{p-1} sont ϵ -équivalentes. Comme dans la partie précédente, on notera r_{p-1} , r_p et r_{p+1} les régions d'index $p-1$, p et $p+1$ mises en jeu.

On adopte les notations suivantes : R_k désigne la somme des colonnes d'index k ; pour $k = p-1, p, p+1$ on note $R'_k = R_k - r_k$.

En prenant $s = p$ dans (3) on obtient :

$$\begin{aligned} -(x-1)r_{p-1} &= (x-1)R'_{p-1} + \sum_{k \neq p, (p-1)} (x^{p-k} - 1)R_k \\ &= (x^{-1} - 1)r_{p+1} + (x^{-1} - 1)R'_{p+1} + (x-1)R'_{p-1} + \sum_{k \neq p, p+1, (p-1)} (x^{p-k} - 1)R_k \end{aligned}$$

Tous les coefficients sont divisibles par $(x-1)$ dans $\mathbb{Z}[x^+, x^-]$, on obtient donc :

$$r_{p-1} = -\left(\frac{x^{-1} - 1}{x-1}\right)r_{p+1} + \frac{(x^{-1} - 1)}{x-1}R'_{p+1} + R'_{p-1} + \sum_{k \neq p, p+1, (p-1)} (x^{p-k} - 1)R_k.$$

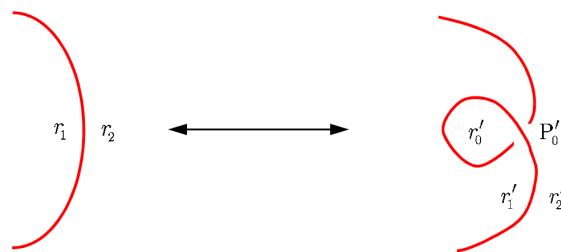
On effectue alors sur M_{p-1} l'opération :

$$r_{p+1} \leftarrow -\frac{(x^{-1}-1)}{x-1}r_{p+1} - \frac{(x^{-1}-1)}{x-1}R'_{p+1} - R'_{p-1} - \sum_{k \neq p, p+1, (p-1)} (x^{p-k}-1)R_k.$$

On obtient alors M_{p+1} , d'où l' ϵ -équivalence entre les matrices extraites de celle du diagramme.

Il suffit maintenant de montrer qu'une succession finie de mouvements de Reidemeister conserve l' ϵ -équivalence des matrices. Avec ce qui précède, il suffit de montrer qu'une matrice extraite de celle du diagramme initial est ϵ -équivalente à une matrice extraite de celle du diagramme final pour avoir le résultat souhaité.

Mouvement de Reidemeister de type 1 :

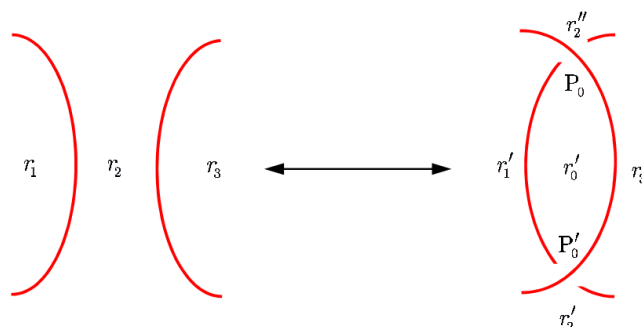


Soit M_0 la matrice du diagramme après avoir supprimé les colonnes r_1 et r_2 avant le mouvement, et M'_0 celle obtenue en supprimant les colonnes r'_1 et r'_2 . On a alors :

$$M = \begin{matrix} & r_1 & r_2 & r_3 & \cdots & r_{n+2} \\ p_1 & & & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \\ p_n & & & M_0 & & \end{matrix} \quad \text{et} \quad M' = \begin{matrix} & r'_0 & r_3 & \cdots & r_{n+2} \\ p'_0 & \pm 1, x & 0 & \cdots & 0 \\ p_1 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & M_0 & \\ p_n & 0 & & & \end{matrix}.$$

On a en effet qu'il va y avoir une modification de la matrice de départ du fait de la nouvelle région r'_0 et le point de croisement p'_0 . Il est clair que la région r'_0 n'a comme coefficient non nul que celui qui correspond au point de croisement p'_0 , et que la partie de M'_0 obtenue en supprimant la première colonne et la première ligne est exactement M_0 , et elle est ϵ -équivalente à celle-ci.

Mouvement de Reidemeister de type 2 :



Comme dans le cas précédent, on notera M la matrice du diagramme avant le mouvement, et M_0 issue de M en supprimant les colonnes r_1 et r_2 . Les équations du nouveau diagramme qui s'ajoutent à celles de l'ancien sont :

$$\begin{aligned} p_0(r) &= xr'_2 - xr'_1 + r'_0 - r'_3 \\ p'_0(r) &= xr'_1 - xr''_2 + r'_3 - r'_0 \end{aligned}$$

La matrice M est donc :

$$M = \begin{matrix} & r_1 & r_2 & r_3 & \cdots & r_{n+2} \\ p_1 & & & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & M_0 & \\ p_n & & & & & \end{matrix}.$$

La matrice M' est donc :

$$M' = \begin{matrix} & r'_0 & r'_1 & r'_2 & r''_2 & r'_3 & r_4 & \cdots & r_{n+2} \\ p_0 & 1 & -x & x & 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ p'_0 & -1 & x & 0 & -x & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ p_1 & 0 & & & & & & & \\ \vdots & \vdots & r_1 & \vdots & \vdots & & M_0 & & \\ p_n & 0 & & & & & & & \end{matrix}.$$

Il s'agit donc de montrer que M'_0 (obtenue en supprimant r'_1 et r''_2 de M') est ϵ -équivalente à M_0 .

L'expression de M'_0 est donc la suivante :

$$M'_0 = \begin{matrix} & r'_0 & r'_2 & r'_3 & r_4 & \cdots & r_{n+2} \\ p_0 & \left(\begin{array}{cccccc} 1 & x & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & & & \\ \vdots & & & & & \\ p_n & 0 & & & & \end{array} \right) \end{matrix}.$$

On effectue alors les opérations suivantes :

$$L_2 \leftarrow L_2 + L_1 : \begin{pmatrix} 1 & x & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \vdots & & & & \\ \vdots & \vdots & & M_0 & & \\ 0 & \vdots & & & & \end{pmatrix}.$$

On effectue autant de combinaisons linéaires avec la deuxième ligne pour faire apparaître des zéros sur la deuxième colonne

$$\begin{pmatrix} 1 & x & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & & & \\ \vdots & \vdots & & M_0 & & \\ 0 & 0 & & & & \end{pmatrix}.$$

Enfin en effectuant successivement :

$$\begin{aligned} C_2 &\leftarrow x^{-1}C_2 \\ C_2 &\leftarrow C_2 - C_1 \\ C_3 &\leftarrow C_3 + C_1 \end{aligned}$$

On obtient :

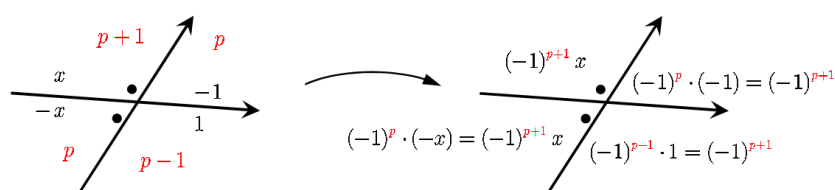
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & & & \\ \vdots & \vdots & & M_0 & & \\ 0 & 0 & & & & \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est ϵ -équivalente à M_0 (deux ajouts d'une ligne et d'une colonne de zéros avec un 1 comme élément commun), d'où la propriété pour le deuxième mouvement.

Avant de passer aux mouvements de Reidemeister de type 3, nous allons d'abord énoncer et démontrer un lemme.

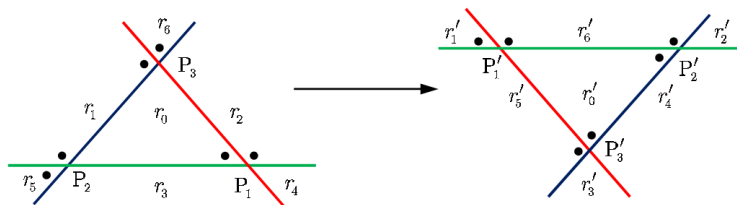
Lemme 3.1 Soit M une matrice de diagramme. Alors la matrice \tilde{M} où tous les coefficients de M ont été remplacés par leurs valeurs absolues est ϵ -équivalente à M .

Preuve : Multiplions chaque colonne d'index p de M par $(-1)^p$, pour $p \in [0, r]$. Cela aura pour conséquence que chaque ligne de la matrice obtenue sera soit négative, soit positive. En effet, considérons le schéma suivant :



On a déjà vu que chaque croisement est de cette forme-ci, seul le pointage des régions change. On remarque donc que les nouvelles équations régissant les lignes sont de la forme $(-1)^p(x + x + 1 + 1)$. il suffit ensuite de multiplier les lignes où p est impair par -1 pour avoir des coefficients positifs partout. Les seules opérations ayant été faites consistent à multiplier des lignes et des colonnes par (-1) d'où l' ϵ -équivalence des deux matrices. \square

Mouvement de Reidemeister de type 3 :



On a que les matrices M et M' ont la même taille. On va montrer cette fois-ci que leurs transposées sont ϵ -équivalentes. On remarque que si deux matrices ont leurs transposées ϵ -équivalentes, alors elles sont ϵ -équivalentes.

On considère ici les transposées de M et M' , notées respectivement N et N' avec seulement des coefficients positifs (opération permise par le lemme précédent).

On a d'abord, après mise en équation du diagramme :

$$M = \begin{matrix} & r_0 & r_1 & r_2 & r_3 & r_4 & r_5 & r_6 & r_7 & \cdots & r_{n+1} \\ p_1 & \left(\begin{array}{cccccccccc} -x & 0 & x & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & x & 0 & 1 & 0 & -x & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -x & -1 & 0 & 0 & 0 & x & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \vdots & & & & & & & & \\ \vdots & & & & & & & & & & \\ p_n & 0 & & & & & & & & & \end{array} \right) \end{matrix}$$

$$M' = \begin{matrix} & r'_0 & r'_1 & r'_2 & r'_3 & r'_4 & r'_5 & r'_6 & r_7 & \cdots & r_{n+1} \\ p'_1 & \left(\begin{array}{cccccccccc} -1 & -x & 0 & 0 & 0 & 1 & x & 0 & \cdots & 0 \\ -x & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & x & 0 & \cdots & 0 \\ x & 0 & 0 & 1 & -1 & -x & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \vdots & & & & & & & & \\ \vdots & & & & & & & & & & \\ p_n & 0 & & & & & & & & & \end{array} \right) \end{matrix}.$$

D'où :

$$N = ({}^t \tilde{M}) = \begin{matrix} & p_1 & p_2 & p_3 & \cdots & \cdots & p_n \\ r_0 & \left(\begin{array}{ccccccc} x & 1 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & x & x & & \cdots & & \\ x & 0 & 1 & & \cdots & & \\ 1 & 1 & 0 & & \cdots & & \\ 1 & 0 & 0 & & \cdots & & \\ 0 & x & 0 & & \cdots & & \\ 0 & 0 & x & & \cdots & & \\ r_7 & & & & \cdots & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & \\ r_{n+1} & & & & & & \end{array} \right) \end{matrix}.$$

De même on obtient N' :

$$N' = ({}^t \tilde{M}') = \begin{matrix} & p'_1 & p'_2 & p'_3 & \cdots & \cdots & p'_n \\ r'_0 & \left(\begin{array}{ccccccc} 1 & x & x & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ x & 0 & 0 & & & \cdots & \\ 0 & 1 & 0 & & & \cdots & \\ 0 & 0 & 1 & & & \cdots & \\ 0 & 1 & 1 & & & \cdots & \\ 1 & 0 & x & & & \cdots & \\ x & x & 0 & & & \cdots & \\ & & & & & \cdots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & \\ & & & & & & \end{array} \right) & \\ r'_{n+1} & & & & & & \end{matrix}$$

On pose maintenant $\tilde{N} = N' \cdot A$ où A est définie par :

$$A = \begin{pmatrix} -x & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ x & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Cette multiplication revient à effectuer des combinaisons linéaires sur les lignes et les colonnes de N , donc N et \tilde{N} sont ϵ -équivalentes. Le calcul donne alors :

$$\tilde{N} = \begin{pmatrix} x^2 & x & x & 0 & \cdots & 0 \\ -x^2 & 0 & 0 & \cdots & & \\ x & 0 & 1 & \cdots & & \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & & \\ x+1 & 1 & 1 & \cdots & & \\ 0 & x & 0 & \cdots & & \\ 0 & 0 & x & \cdots & & \\ & & & \cdots & & \\ & & & \cdots & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \end{pmatrix}.$$

On effectue ensuite les opérations suivantes sur \tilde{N} :

$$\begin{aligned} L_2 &\longleftarrow L_2 + L_1 \\ L_1 &\longleftarrow x^{-1}L_1 \\ L_5 &\longleftarrow L_5 - L_1 \end{aligned}$$

On obtient ainsi N . Nous avons donc :

$$M' \stackrel{\epsilon}{\sim} \tilde{M}' \stackrel{\epsilon}{\sim} N' \stackrel{\epsilon}{\sim} \tilde{N} \stackrel{\epsilon}{\sim} \tilde{M} \stackrel{\epsilon}{\sim} M.$$

Donc $M \stackrel{\varepsilon}{\sim} M'$.

Ainsi, nous venons de voir que les mouvements de Reidemeister ne modifient pas le polynôme d'Alexander. Le théorème de Reidemeister nous dit que deux nœuds sont du même type si et seulement si il existe une succession finie de mouvements de Reidemeister permettant d'obtenir le diagramme de l'un à partir de celui de l'autre. Donc, deux nœuds du même type ont le même polynôme d'Alexander, ce qui montre que c'est un invariant de nœud.

3.2 Une preuve par la théorie des groupes

Nous allons maintenant donner une deuxième preuve du fait que le polynôme d'Alexander est un invariant de nœud, preuve qui s'appuie sur la théorie des groupes. Celle ci aura le mérite de donner l'origine de l'algorithme que nous avons vu dans la section précédente.

3.2.1 Un premier résultat de théorie des groupes

Définition 3.2 Soit G un groupe. On dira que G est indexé par \mathbb{Z} s'il existe un morphisme (noté f par la suite) de groupe surjectif de (G, \cdot) vers $(\mathbb{Z}, +)$. On notera G_0 son noyau. On appellera "index" d'un élément de G son image dans \mathbb{Z} par ce morphisme.

Remarque 3.2 Le fait que le morphisme soit surjectif est équivalent à l'existence d'un élément d'index 1. En effet, on rappelle que $\mathbb{Z} = \langle 1 \rangle$, et qu'il suffit donc d'avoir 1 (ou -1) pour avoir \mathbb{Z} tout entier.

On considère ici un groupe indexé G , pas nécessairement commutatif, qui admet une présentation finie. On notera cette présentation $\langle s, a_1, a_2 \dots a_n \mid r_1 = 0 \dots r_n = 0 \rangle$, et on utilisera la notation additive pour effectuer des opérations dans le groupe. On considérera ici des groupes où le nombre de relations est égal au nombre de générateurs.

Proposition 3.2 On peut choisir la présentation précédente de façon à ce que s soit d'index 1 et a_i d'index 0 pour $i = 1 \dots n$.

Preuve : Soit $(a'_1 \dots a'_n)$ une famille de générateurs de G . On note k_i pour $i = 1 \dots n$ l'index de a'_i . Alors en rajoutant s à cette famille et en remplaçant a'_i par $a_i = a'_i - k_i s$, on obtient une famille de générateurs qui respecte les conditions demandées.

En effet, tout élément de $(a'_1 \dots a'_n)$ est combinaison d'éléments de $(s, a_1 \dots a_n)$, et pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ on a :

$$\begin{aligned} f(a_i) &= f(a'_i - k_i s) \\ &= f(a'_i) - k_i f(s) \\ &= k_i - k_i \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

Cette présentation nous donne que les relations sont nécessairement de la forme :

$$r_j = \sum_{j \in J} \lambda_j s + a_{p_j} - \lambda_j s = 0.$$

En effet, 0 étant d'indice nul et tous les a_i aussi, comme s est d'index 1, il ne peut apparaître dans une relation sans y être en tant que conjugué.

Soit a un élément de G_0 . Il existe alors un ensemble J fini et une famille d'entiers naturels $(\lambda_j)_{j \in J}$ tels que l'on ait :

$$a = \sum_{j \in J} \lambda_j s + a_{p_j} - \lambda_j s.$$

On utilisera alors la notation :

$$\forall \lambda \in \mathbb{Z} \quad \pm x^\lambda a = \lambda s \pm a - \lambda s$$

Les relations se réécrivent donc :

$$r_i = \sum_{j \in J} x^{\lambda_{i,j}} a_{p_{i,j}} = 0.$$

On peut donner une présentation de $G_0 : \langle (x^k a_1)_{k \in \mathbb{Z}}, \dots, (x^k a_n)_{k \in \mathbb{Z}} \mid (x^k r_1 = 0)_{k \in \mathbb{Z}}, \dots, (x^k r_n = 0)_{k \in \mathbb{Z}} \rangle$.

Considérons maintenant G_{0c} l'abélianisé de G_0 ; cela revient à rajouter toutes les relations de commutations des éléments de G_0 c'est-à-dire :

$$a + b - a - b = 0, \quad \forall a, b \in G_0.$$

Les relations dans la présentation de G_{0c} s'écrivent donc :

$$\sum_{i=1}^n X_{i,j} a_i = 0,$$

où les termes $X_{i,j}$ sont des polynômes en x^i avec i dans \mathbb{Z} .

On associe alors à un groupe G indexé la matrice $A_G = (X_{i,j})$.

Remarque 3.3 *On peut remarquer au passage que $G_{0,c}$ est un $\mathbb{Z}[x, x^{-1}]$ module, et que A_G en est une matrice de présentation.*

Définition 3.3 *On dira que G et H , deux groupes indexés, sont directement isomorphes si il existe un isomorphisme ϕ entre G et H tel que pour tout élément g de G , g et $\phi(g)$ sont de même index. On dira de même que deux groupes sont indirectement isomorphes si il existe un isomorphisme ϕ entre G et H tel que pour tout élément g de G , g et $\phi(g)$ sont d'index opposés.*

On introduit une nouvelle notion d'équivalence entre matrice.

Définition 3.4 *On dira que deux matrices sont stablement équivalentes si on peut obtenir l'une à partir de l'autre avec un nombre fini des opérations suivantes :*

- les opérations de l' ϵ -équivalence.
- rajouter une colonne de zéros à la matrice.

Nous avons maintenant le théorème suivant.

Théorème 3.1 *Soit G et H deux groupes directement équivalents de présentations finies ; alors A_G et A_H sont stablement ϵ -équivalentes.*

Preuve :

Soit G et H de tels groupes. On note leurs présentations respectives $G = \langle s, g_1 \dots g_n \mid r_1 = 0 \dots r_n = 0 \rangle$ et $H = \langle t, h'_1 \dots h'_n \mid u'_1 = 0 \dots u'_n = 0 \rangle$. On remarque d'abord deux chose :

- L'ajout d'un générateur g_{n+1} d'index zéro et d'une relation $r_{n+1} = g_{n+1} + r(g_i) = 0$ – où $r(g_i)$ désigne l'expression de g_{n+1} en fonction des autres générateurs – donne que la matrice A'_G obtenue est stablement ϵ -équivalente à A_G . En effet, cela revient à effectuer l'opération δ sur A_g : g_{n+1} n'intervient que dans une seule relation, donc la ligne rajoutée n'a qu'un coefficient non nul, correspondant à la colonne r_{n+1} :

$$A'_G = \begin{matrix} & r_{n+1} & r_1 & \cdots & r_n \\ \begin{matrix} g_{n+1} \\ \vdots \\ g_n \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & A_G & \end{pmatrix} \end{matrix}$$

En opérant le nombre de fois nécessaire sur les lignes avec la ligne g_{n+1} , on obtient :

$$A'_G \stackrel{\epsilon}{\sim} \begin{matrix} & r_{n+1} & r_1 & \cdots & r_n \\ \begin{matrix} g_{n+1} \\ \vdots \\ g_n \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & A_G & \\ 0 & & & \end{pmatrix}, \end{matrix}$$

d'où le résultat.

- Remplacer le générateur s d'index 1 par un autre élément t de g d'index 1 donne une matrice A'_G qui est stablement ϵ -équivalente à A_G .

Utilisons la notation suivante : pour tout $g \in G$ on note $yg = t + g - t$.

s peut alors s'écrire : $s = t + h(y, a_i)$ où $h(y, g_i)$ désigne une somme finie de conjugués d'éléments g_i par $\pm t$. On a alors pour tout élément g de G :

$$\begin{aligned} xg &= s + g - s \\ &= t + h(y, a_i) + g - h(y, a_i) - t \\ &= y(h(y, a_i) + g - h(y, a_i)). \end{aligned}$$

Or, dans l'abélianisé de G_0 , on a : $yg + yh(y, a_i) = yh(y, a_i) + yg$. Donc la matrice A'_G obtenue est exactement la matrice A_G à un changement de notation $x = y$ près. On a donc, dans l'abélianisé de G_0 , pour tout générateur t, s d'index 1 et tout $g \in G$: $xg = s + g - s = t + g - t$. Il faut préciser aussi que pour tout g, g' dans G on a $x^k(g + g') = x^k g + x^k g'$.

- Rajouter une relation s'exprimant en fonction des autres donne que la matrice A'_G obtenue est stablement ϵ -équivalente à A_G . En effet, cela revient, après combinaisons linéaires sur la colonne ajoutée, à ajouter une colonne de zéros, d'où le résultat.

On pose $\tilde{\phi}$ l'isomorphisme de G vers H . On a alors pour tout $i \in [1, n]$ une relation du type :

$$h'_i = \sum_{k \in K} x^{i_k} \tilde{\phi}(g_{j_k}) \quad g_{j_k} \in (\pm g_l)_{l \in [1, n]} \quad (4)$$

De même, on a pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$g_i = \sum_{j \in J} x^{ij} \tilde{\phi}^{-1}(h'_{k_j}) \quad h_{k_j} \in (\pm h_l)_{l \in \llbracket 1, n \rrbracket} \quad (5)$$

On pose alors :

$$h_i = \tilde{\phi}^{-1}(h'_i) \quad (6)$$

$$u_i = \tilde{\phi}^{-1}(u'_i) \quad (7)$$

On peut supposer que $\tilde{\phi}(s) = t$, comme on a vu qu'une fois dans l'abélianisé cela n'avait pas d'importance, on peut écrire pour tout $h \in H$: $\tilde{\phi}^{-1}(xh) = x\tilde{\phi}^{-1}(h)$.

On obtient alors :

$$h_i = \sum_{k \in K} x^{ik} g_{j_k} \quad g_{j_k} \in (\pm g_l)_{l \in \llbracket 1, n \rrbracket} \quad (8)$$

ainsi que :

$$g_i = \sum_{j \in J} x^{ij} h_{k_j} \quad h_{k_j} \in (\pm h_l)_{l \in \llbracket 1, n \rrbracket} \quad (9)$$

Les relations (8) et (9) deviennent donc dans l'abélianisé de G_0 :

$$h_i = \sum_{j=1}^n \psi_i^j g_j \quad (10)$$

$$g_i = \sum_{j=1}^n \phi_i^j h_j \quad (11)$$

On a maintenant la présentation suivante de $G_{0,c}$:

$$G = \langle (x^k g_1)_{k \in \mathbb{Z}} \dots (x^k g_n)_{k \in \mathbb{Z}}, (x^k h_1)_{k \in \mathbb{Z}} \dots (x^k h_n)_{k \in \mathbb{Z}}, (x^k r_1)_{k \in \mathbb{Z}} \dots (x^k r_n)_{k \in \mathbb{Z}}, (x^k u_1)_{k \in \mathbb{Z}} \dots (x^k u_n)_{k \in \mathbb{Z}}, (x^k (h_i - \sum_{j=1}^n \psi_i^j g_j))_{k \in \mathbb{Z}}, (x^k (g_i - \sum_{j=1}^n \phi_i^j h_j))_{k \in \mathbb{Z}} \rangle$$

On pose les matrices : $\Psi = (\psi_i^j)_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2}$ et $\Phi = (\phi_i^j)_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2}$.

Nous allons maintenant remarquer quelque chose. On peut représenter un élément h' de H par le vecteur colonne de \mathbb{R}^n représentant les coordonnées (des polynômes de $\mathbb{Z}[x^\pm]$) de $h = \tilde{\phi}^{-1}(h')$ selon les h_i . Soit x_h un tel vecteur. On a alors :

$$(\Psi\Phi - I_n)(x_h) = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n \psi_1^i \sum_{j=1}^n \phi_i^j x_{h_j} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n \psi_n^i \sum_{j=1}^n \phi_i^j x_{h_j} \end{pmatrix} - x_h \quad (12)$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n x_{h_j} \phi_i^j \psi_1^i \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n x_{h_j} \phi_i^j \psi_n^i \end{pmatrix} - x_h \quad (13)$$

colonnes :

$$A'_G \stackrel{\varepsilon}{\sim} \begin{pmatrix} r_1 & \cdots & r_n & u_1 & \cdots & u_n & g_1 - \phi_1 & \cdots & g_n - \phi_n & h_1 - \psi_1 & \cdots & h_n - \psi_n \\ g_1 & & & & & & & & & & & \\ \vdots & & & & & & & & & & & \\ g_n & & & & & & & & & & & \\ h_1 & & & & & & & & & & & \\ \vdots & & & & & & & & & & & \\ h_n & & & & & & & & & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{pmatrix}$$

On a que les colonnes de $-B_H$ définissent les relations nulles de H , mais la matrice $-B_H\Psi$ appliqué à un vecteur représentant les cordonnées d'un élément g selon $(g_1 \dots g_n)$ va donner une relation nulle de G . Donc les colonnes de $-B_H\Psi$ sont des combinaisons linéaires des colonnes de A_G , d'où :

$$A'_G \stackrel{\varepsilon}{\sim} \begin{pmatrix} r_1 & \cdots & r_n & u_1 & \cdots & u_n & g_1 - \phi_1 & \cdots & g_n - \phi_n & h_1 - \psi_1 & \cdots & h_n - \psi_n \\ g_1 & & & & & & & & & & & \\ \vdots & & & & & & & & & & & \\ g_n & & & & & & & & & & & \\ h_1 & & & & & & & & & & & \\ \vdots & & & & & & & & & & & \\ h_n & & & & & & & & & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{pmatrix}$$

De même :

$$A'_G \stackrel{\varepsilon}{\sim} \begin{pmatrix} r_1 & \cdots & r_n & u_1 & \cdots & u_n & g_1 - \phi_1 & \cdots & g_n - \phi_n & h_1 - \psi_1 & \cdots & h_n - \psi_n \\ g_1 & & & & & & & & & & & \\ \vdots & & & & & & & & & & & \\ g_n & & & & & & & & & & & \\ h_1 & & & & & & & & & & & \\ \vdots & & & & & & & & & & & \\ h_n & & & & & & & & & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{pmatrix}$$

Donc d'après ce qui précède :

$$A'_G \stackrel{\varepsilon}{\sim} \begin{matrix} g_1 \\ \vdots \\ g_n \\ h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{matrix} \begin{pmatrix} r_1 & \cdots & r_n & u_1 & \cdots & u_n & g_1 - \phi_1 & \cdots & g_n - \phi_n & h_1 - \psi_1 & \cdots & h_n - \psi_n \\ & & A_G & & & 0_n & & & 0_n & & & -\Psi \\ & & & & & & & & & & & \\ & & 0_n & & & 0_n & & & 0_n & & & I_n \\ & & & & & & & & & & & \end{pmatrix}$$

Enfin :

$$A'_G \stackrel{\varepsilon}{\sim} \begin{matrix} g_1 \\ \vdots \\ g_n \\ h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{matrix} \begin{pmatrix} r_1 & \cdots & r_n & u_1 & \cdots & u_n & g_1 - \phi_1 & \cdots & g_n - \phi_n & h_1 - \psi_1 & \cdots & h_n - \psi_n \\ & & A_G & & & 0_n & & & 0_n & & & 0_n \\ & & & & & & & & & & & \\ & & 0_n & & & 0_n & & & 0_n & & & I_n \\ & & & & & & & & & & & \end{pmatrix}$$

On a donc bien, à la vue de la dernière matrice, A'_G qui est stablement équivalente à A_G . A_G et A_H jouant des rôles symétriques, on a $A'_G \stackrel{s-\varepsilon}{\sim} A_H$ et donc finalement : $A_G \stackrel{s-\varepsilon}{\sim} A_H$. D'où le théorème. \square

Définition 3.5 Soit M une matrice de taille (m, n) à coefficients dans $\mathbb{Z}[x^+, x^-]$. On note alors

$$\Delta_M(i) = \text{pgcd}(\{\det(M(m-i))\}),$$

où $\{M(m-i)\}$ désigne l'ensemble des sous-matrices carrées de tailles $m-i$ obtenues en supprimant le nombre de lignes et de colonnes nécessaires de M .

Théorème 3.2 On a que pour tout i , $\Delta_M(i+1)$ divise $\Delta_M(i)$ et les $\Delta_M(i)$ sont des invariants de stable ε -équivalence.

Preuve :

Soit $i \in [0, m]$. Soit $M(m-i)$ une matrice extraite de M . En développant son déterminant, on se retrouve avec une somme de multiples de déterminant de $M(m-(i+1))$. Donc $\Delta_M(i+1)$ divise $\Delta_M(i)$.

Rajouter des combinaisons linéaires sur les lignes de M ne va pas changer les $\Delta_M(i)$. En effet, soit D l'ensemble des mineurs d'ordre $m - i$ avant avoir effectué des combinaisons linéaires sur lignes et colonnes. Après avoir fait ces modifications, D' , l'ensemble des mineurs d'ordre $m - i$ de M' est composé de combinaison linéaires d'éléments de D . Donc $\Delta_M(i)$ divise tous les éléments de D' donc $\Delta'_M(i)$. Or, ces opérations sont inversibles, donc en effectuant les opérations inverses sur M' on obtient par le même raisonnement que $\Delta'_M(i)$ divise $\Delta_M(i)$. Donc $\Delta_M(i) = \Delta'_M(i)$, d'où le résultat :

- multiplier une ligne ou une colonne par $\pm x^n$ ne change pas les pgcd considérés d'après la remarque précédente ;
- il en va de même pour ce qu'y est d'effectuer des combinaisons sur les lignes et les colonnes ;
- supposons que l'on effectue l'opération δ sur M , on obtient alors :

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & M & \\ 0 & & & \end{pmatrix}.$$

Soit $M'(m+1-i)$ une matrice de M' .

- Premier cas : La première colonne ou bien la première ligne est supprimée, auquel cas le déterminant est nul.

Deuxième cas : Ni l'une ni l'autre n'est enlevée on obtient donc :

$$M'(m+1-i) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & M(m-i) & \\ 0 & & & \end{pmatrix}.$$

et donc $\det(M'(m+1-i)) = \det(M(m-i))$, d'où la propriété.

- Troisième cas : La ligne rajoutée et la colonne rajoutée sont supprimées, on se retrouve donc avec un déterminant de la forme : $\det(M'(i)) = \det(M(m-(i-1)))$. Or on sait que $\Delta_M(i)$ divise $\Delta_M(i-1)$, donc $\det(M(m-(i-1)))$, et donc $\Delta_{M'}(i)$. D'où le résultat.

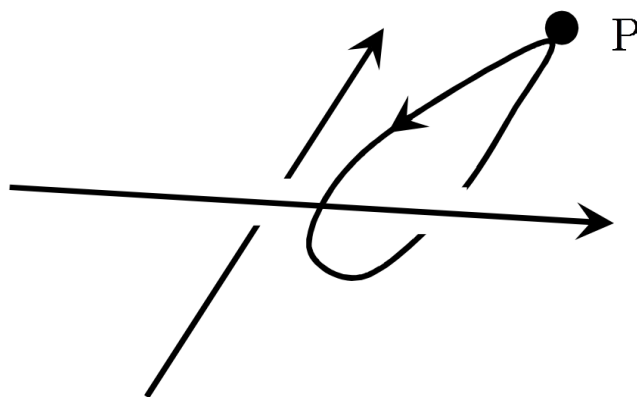
- Par un raisonnement analogue au précédent, on montre que l'ajout d'une colonne de zéros ne modifie pas le pgcd considéré. Rajouter une colonne de zéros ajoute des mineurs nuls aux mineurs de départ et donc ne modifie pas le pgcd de l'ensemble de ces mineurs.

□

3.2.2 Application au groupe du nœud

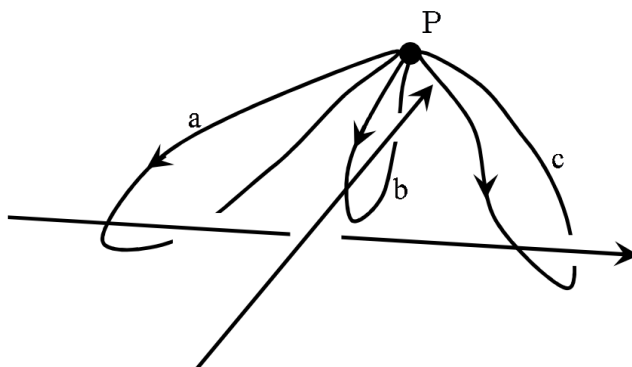
Nous allons admettre ici un autre résultat qui est la présentation de Wirtinger pour le groupe fondamental d'un nœud que nous avons défini au début du rapport. Celle ci donne comme son nom l'indique une présentation du groupe fondamental d'un nœud qui est

finie. On notera $\Pi_1(K)$ le groupe du nœud. Elle met en jeu les méridiens à chaque arc du nœud et les relations aux croisements. On se fixe d'abord un point P dans le complémentaire du nœud qui servira de "point de départ". Le méridien associé à un arc est un lacet qui part de P , enlace l'arc dans le sens direct et revient en P :

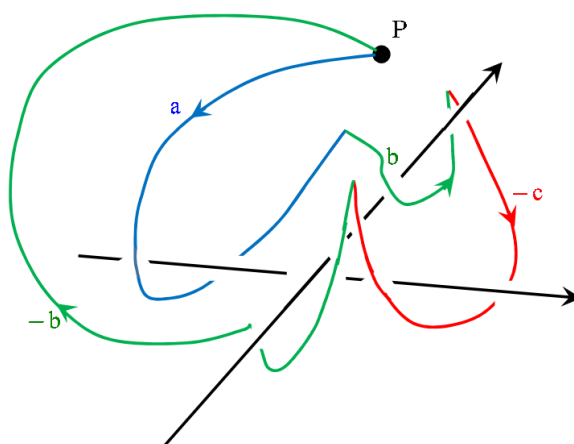


La présentation de Wirtinger est la suivante.

- Les générateurs sont les méridiens (ou plus précisément les classes d'équivalences des méridiens).
- Les relations sont des relations aux croisements :



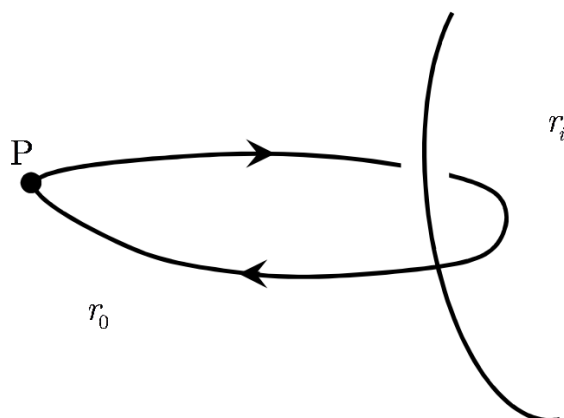
On a au croisement la relation : $c = b + a - b$, où $-a$ désigne le lacet qui enlace l'arc dans le sens indirect. En effet, on peut montrer cela avec le schéma suivant :



Il faut voir cela comme une composition de lacets : le fait qu'entre chaque lacet on ne revienne pas au point P n'est pas grave car on peut se ramener à ce cas par homotopies. On s'aperçoit sur le schéma que si on "déplie" la succession de lacets, on aboutit au lacet trivial qui n'enlace à aucun moment le nœud.

Alexander a repris cette présentation et l'a adapté à sa théorie. Il s'agit ici de faire un changement de générateurs dans la présentation de Wirtinger. Celle-ci a la particularité d'être obtenue à partir du diagramme du nœud.

On considère une région r_0 qui correspondra à l'opération unité, là où on mettra notre point P de départ. Ensuite, chaque région correspondra à un élément du groupe, représentant le lacet partant de P , passant sous le diagramme, traversant la région et revenant au point P par dessus le diagramme.



On remarque que comme dans la présentation de Wirtinger, on a aux croisements une relation de la forme :

$$r_i - r_j + r_k - r_l = 0.$$

Il s'agit de voir maintenant ce groupe comme un groupe indexé. L'index d'une région correspondra, au nombre (algébrique) de fois où le lacet associé tourne autour du nœud,

ou encore le nombre d'arêtes qu'il enlace. Pour savoir comment "compter" ce nombre de tours, on se fixe deux régions, r_0 et r_{n+1} , d'index consécutifs 0 et 1. On notera désormais $r_{n+1} = s$; posons maintenant pour tout $i \in [|1, n|]$, en notant p_i l'index de r_i :

$$r'_i = r_i - p_i s.$$

On a alors le nouvel ensemble de générateurs du groupe du nœud qui est $(s, r'_1 \dots r'_n)$. Les relations aux croisements vont donc s'exprimer, si le croisement est d'index p on a alors :

$$(ps + r'_i) - ((p+1)s + r'_j) + (ps + r'_k) - ((p-1)s + r'_l) = 0$$

Avec les notations habituelles $xg = s + g - s$, on calcule :

$$ps + r'_i - ps - r'_j - ps - s + ps + r'_k - (p-1)s + (p-1)s - r'_l - (p-1)s = 0 \quad (19)$$

$$\text{donc } x^p r'_i - x^p r'_j + x^{p-1} r'_k - x^{p-1} r'_l = 0 \quad (20)$$

$$\text{donc } xr'_i - xr'_j + r'_k - r'_l = 0 \quad (21)$$

On a donc que la matrice $A_{p_{i_1}(K)}$ associée au groupe du nœud est celle du diagramme calculée précédemment. On a donc d'après la première partie que le polynôme d'Alexander du nœud est exactement $\Delta_{A_{p_{i_1}(K)}}(0)$. On a que deux nœuds sont du même type si et seulement si leurs groupes fondamentaux sont isomorphes. Le paragraphe précédent nous donne donc que si deux nœuds K et K' sont du même type alors leurs matrices $A_{p_{i_1}(K)}$ et $A_{p_{i_1}(K')}$ sont stablement ϵ -équivalentes, donc $\Delta_{A_{p_{i_1}(K)}}(0) = \Delta_{A_{p_{i_1}(K')}}(0)$, donc ils ont le même polynôme d'Alexander.

Cette partie conclut donc une deuxième preuve de l'invariance du polynôme d'Alexander. Elle donne néanmoins un résultat plus faible que la précédente car elle ne permet pas de conclure sur l'invariance de la classe d' ϵ -équivalence, elle permet en revanche de justifier l'algorithme du calcul du polynôme d'Alexander donné en début de rapport.

Conclusion

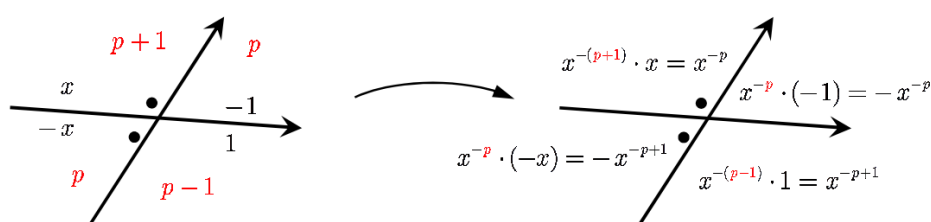
Ce stage de cinq semaines a donc tourné autour de l'étude de cet article ainsi que la réécriture d'une grande partie. Les dernières pages de cet article étaient consacrées à d'autres propriétés d'invariance des matrices de diagrammes que je n'ai pas étudié en profondeur pour me focaliser sur l'étude du polynôme d'Alexander en lui-même. Il est de plus questions en fin d'article de surfaces de Riemann, notions que je n'ai pu aborder par manque de temps et surtout de connaissances mathématiques. Il y a quelque chose qu'il faut remarquer, c'est que dans l'article original, Alexander affirme montrer avec la théorie des groupes l'invariance de la classe d' ϵ -équivalence lorsque l'on regarde deux nœuds d'une même catégorie. En effet, l'assertion (i) page 293 de son article dit qu'en ajoutant une relation à la présentation d'un groupe, dépendante des précédentes, alors la nouvelle matrice est ϵ -équivalente à la précédente. Cela revient à rajouter une colonne de zéros à la matrice de départ (car c'est une combinaison linéaire des autres colonnes) ce qui ne la rend pas ϵ -équivalente mais, comme il a été noté dans la partie précédente, "stablement ϵ -équivalente".

Annexes

Preuve Lemme 3.1 :

Il suffit de montrer que la somme sur les colonnes de la matrice obtenue en multipliant les coefficients de chaque région d'index p par x^{-p} est bien nulle.

Il suffit de considérer les points de croisements. La définition des index des régions donne le schéma suivant :

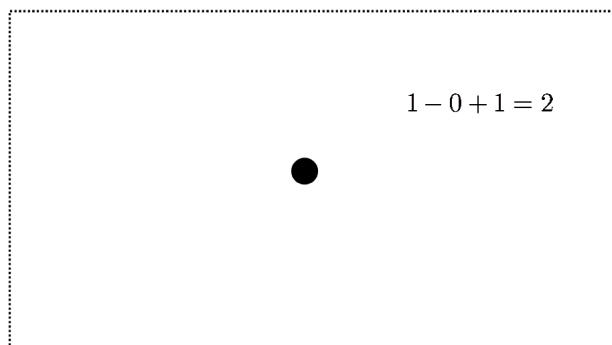


La somme des coefficients de la ligne correspondante est bien nulle, d'où le résultat. \square

Preuve de la formule d'Euler pour un graphe connexe :

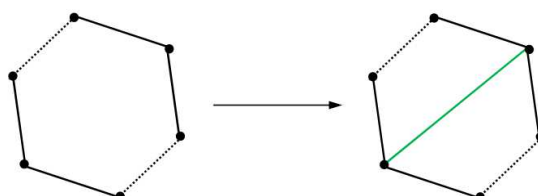
Une preuve de cette formule consiste à effectuer une récurrence sur le nombre n d'arêtes du graphe.

Initialisation : On considère le cas $n = 0$. Un simple schéma suffit à montrer la formule, en rappelant que la région non bornée est comptée dans le nombre de faces.



Hérédité : Soit n un entier supérieur ou égal à 3. On suppose la propriété vraie pour tout $i \in [1, n]$. Soit un graphe connexe à $n + 1$ arêtes. On retire une arête de ce graphe joignant deux sommets.

Premier cas : Le graphe résultant G' est un graphe connexe à n arêtes. Dans ce cas l'hypothèse de récurrence s'applique et on a bien $s - a + f = 2$. Rajouter l'arête entre deux sommets à ce graphe consiste donc à faire l'opération suivante :

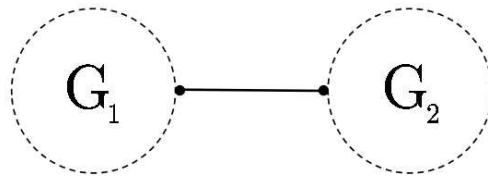


L'ajout d'une arête sépare une région de G' en deux régions. G a donc une arête et une région en plus de G' . On a bien $s - (a + 1) + (f + 1) = 2$ d'où la propriété au rang $n + 1$.

Deuxième cas : Le graphe résultant est un graphe à deux composantes connexes G_1 et G_2 . Ces deux graphes ayant un nombre d'arêtes strictement inférieur ou égal à n l'hypothèse de récurrence s'applique aux deux et on a :

$$\begin{aligned} s_1 - a_1 + f_1 &= 2 \\ s_2 - a_2 + f_2 &= 2 \end{aligned}$$

On a donc la situation suivante :



Le graphe G a donc les propriétés suivantes :

$$s = s_1 + s_2$$

$$a = a_1 + a_2 + 1$$

$$f = f_1 + f_2 - 1$$

En effet la partie connexe non bornée est commune à G_1 et G_2 et ne doit pas être comptée deux fois.

On a alors :

$$\begin{aligned} s - a + f &= (s_1 - a_1 + f_1) + (s_2 - a_2 + f_2) - 2 \\ &= 2 + 2 - 2 \\ &= 2 \end{aligned}$$

D'où la propriété au rang $n + 1$ d'où la proposition. \square

Bibliographie

J.W. Alexander, "Topological invariants of knots and links", Trans. Amer. Math. Soc., vol. 30, no 2, 1928, p.275-306.

E. Long, "Topological invariants of knots : three routes to the Alexander Polynomial", Manchester University, supervised by Grant Walker, May 14, 2005.

G. Burde and Heiner Zieschang, "Knots", Walter De Gruyter, Berlin ·New-York, 2003.