RAPPORT DE STAGE
Autour des variétés toriques

Mériadec CHUBERRE

15 mai-30 juin 2017

Table des matières

Introduction

Ce document est le rapport du stage que j'ai effectué au Laboratoire de mathématiques de Bretagne Atlantique à l'université de Bretagne Sud à Brest entre le 15 mai et le 30 juin sous la direction de Éric Rannou.

Le but de ce stage était une initiation à la géometrie algébrique à travers un objet : les variétés toriques. Les variétés algébriques forment le support de cette discipline, elles correspondent à des ensembles de points qui annulent une famille de pôlynomes donnée et ont de nombreuses applications.

Les variétés toriques sont un exemple de variétés algébriques dont il est aisé de fabriquer des exemples simples en dimension 2. Nous commencerons donc par poser le cadre algébrique et géométrique qui sera nécessaire pour définir et étudier les variétés toriques. Nous aurons besoin de plusieurs propriétés de théorie des anneaux et algèbres, notamment le Nullstellensatz (ou théorème des zéros de Hilbert). On définiera aussi les cônes polhyédraux convexes auxquels on associera justement les variétés toriques.

Dans un deuxième temps nous définierons cet objet et en donnerons certaines propriétés. Nous donnerons notamment un théorème de compacité. Enfin nous donnerons dans une dernière partie un exemple de variété torique en dimension 2 qui permettra de concretiser les résultats plutôt théoriques donnés avant.

1 Un petit peu d'algèbre générale.

Avant de pouvoir définir et travailler sur les variétés toriques, il va tout d'abord falloir énoncer plusieurs définitions et propriétés d'algèbre et de géométrie.

1.1 Anneaux et $\mathbb{C}$-algèbres.

Définition 1.1. *Soit A un anneau.*

- *A est dit réduit si son seul élément nilpotent est l'élément nul* $(i.e\ \forall x \neq 0\ \ \forall n \in \mathbb{N}$ $x^n \neq 0)$
- *A est dit noethérien si tout idéal I de A est engendré par un nombre fini d'éléments.*
- *Un idéal est dit radical si A/I est réduit.*
- *On définit le radical d'un idéal I de A par :*

$$\sqrt{I} = \{x \in A,\ \ \exists n \in \mathbb{N},\ \ x^n \in I\}$$

Définition 1.2. *Soit A une* $\mathbb{C} - alg\grave{e}bre$. *On dit que A est de type fini s'il existe une partie finie X de A telle que la sous-algèbre engendrée par X soit égale à A.*

Définition 1.3. *Soit A un sous-anneau d'un anneu B. Soit x un élément de B. On dit que x est entier sur A s'il existe un polynôme unitaire à cœfficient dans A annuler par x.*
On dit que B est entier sur A si tous ses éléments le sont.

Définition 1.4. *On dit qu'un anneau A est intégralement clos si les seuls éléments entiers de son corps des fractions sont les éléments de A lui-même.*

Théorème 1.1. *Un anneau factoriel est intégralement clos*

Démonstration. Soit $\frac{p}{q}$ un élément du corps des fractions de A entier sur A avec p et q pris premiers entre eux. On note $P(X) = X^n + \sum_{i=1}^{n-1} a_i X^i$ le polynôme unitaire qui est annulé par $\frac{p}{q}$. On a donc :

$$0 = p^n + \sum_{i=1}^{n-1} a_i q^{n-i} p^i$$

q divise $\sum_{i=1}^{n-1} a_i q^{n-i} p^i$, il divise donc aussi p^n. comme le pgcd de q et p^n vaut 1 (théorème de Gauss) $\frac{p}{q}$ est dans A. D'où le théorème. □

Définition 1.5. *La dimension (de Krüll) d'un anneau A est le plus grand entier n pour lequel il existe des idéaux premiers distincts* $P_0 \subset P_1 \subset \cdots P_n$ *de A.*
Si $A = \{0\}$ *on adoptera la convention* $dim(A) = 0$.
Si un tel n éxiste pas, A est de dimension infinie.

Proposition 1.1. *Si* $\mathbb{K}$ *est un corps, alors la dimension de Krüll de* $\mathbb{K}[X_1, ..., X_n]$ *est n.*

Soit $\mathbb{K}$ un corps algébriquement clos. On notera dans la suite $A = \mathbb{K}[X_1...X_n]$, et S une partie de A. On pose :

$$Z(S) = \{x \in \mathbb{K}^n, \ \ P(x) = 0, \ \ \forall P \in S\}$$

Définition 1.6. *On appelle ensemble algébrique une partie V de $\mathbb{K}^n$ telle qu'il existe $B \subset A$ tel que $B = Z(V)$.*

Pour une partie V de $\mathbb{K}^n$ on notera $I(V)$ le sous-ensemble de A contenant les éléments qui s'annulent sur V. On voit assez facilement que I(V) est un idéal maximal de A.

Théorème 1.2. *Nullestellensatz ou théorème de zéros de Hilbert*
Les trois propositions qui suivent sont vérifiées et indépendantes. La "vrai" formulation, ou plutôt la formulation forte du théorème sera démontrée grâce à l'équivalence avec les deux autres et l'existence de la première.

$i)$ *Si M est un idéal maximal de A alors on a x_M dans $\mathbb{K}^n$ tel que $M = I(x_M)$.*
$ii)$ *Si I est un idéal propre de A alors Z(I) est non vide.*
$iii)$ *Pour tout M idéal de A, $I(Z(M)) = \sqrt{M}$*

Démonstration. . Équivalence des assertions :
$i) \Rightarrow ii)$:
Soit I un idéal propre de A. A étant noethérien, il existe M un idéal maximal de A qui contient I. Par hypothèse Z(M) est non vide ($x_M \in Z(M)$). Or Z(M) est inclus dans Z(I). Donc Z(I) est non vide d'où i).
$ii) \Rightarrow iii)$:
Tout d'abord, on remarque que si $(f_1,...,f_m)$ sont des polynômes n'ayant aucune racine commune, alors ils sont mutuellement premiers entre eux. On a donc une famille d'éléments $(g_i)_{i=1,...,m}$ de A tel que $\sum_{k=1}^{n} g_i f_i = 1$.
Soit M un idéal propre de A. A étant noethérien, on peut choisir un système $(f_1,...,f_m)$ de générateurs de M. Soit g un élément de I(Z(M)). On considère les f_i et g comme des éléments de M[Y]. On pose $G = 1 - Yg$. Ainsi $f_1,..., f_m, G$ n'ont pas de racines en commun. On a donc $g_1,..., g_m, g_{m+1}$ dans M[Y] tels que : $g_1 f_1 + ... + g_m f_m + g_{m+1}G = 1$. On considère π la projection de M[Y] sur M[Y]/(G) qui envoie donc X sur 1/g. On a alors :

$$g_1(1/g) f_1 + ... + g_m(1/g) f_m + g_{m+1}(1/g)G = 1.$$

Ainsi en multipliant par une puissance de g suffisante on obtient :

$$\tilde{g_1} f_1 + ... + \tilde{g_m} f_m = g^n$$

où $\tilde{g_i} = g^n g_i$. Ainsi, g^n est un élément de M. Donc $I(Z(M)) \subset \sqrt{M}$.
Soit maintenant P un élément de $\sqrt{M}$ et n tel que $P^n \in M$. Alors P^n et donc P s'annule sur $\mathbb{Z}(M)$. Donc P es élément de I(Z(M)). D'où l'inclusion réciproque et finalement l'égalité.
$iii) \Rightarrow i)$:
Si M est un idéal maximal on a $M = \sqrt{M} \neq A$. Donc par iii) on a I(Z(M)) différent de A donc Z(M) différent du vide. D'où l'assertion.

. Preuve de l'assertion i)
On a A/M qui est un corps car M est maximal.Ce corps est une extension algébrique de $\mathbb{C}$ donc $\mathbb{C}$ lui-même. Soit donc $x_1,..., x_n$ les images de $X_1,..., X_n$ dans A/M identifiés aux complexes correspondant via l'isomorphisme, on pose $a = (x_1,..., x_n)$. Alors l'idéal engendré par

les $X_i - x_i$ est exactement I(a) et est contenu dans M. I(a) étant maximal on a M=I(a) d'où l'assertion.

□

2 Préliminaires de géométrie algébrique.

2.1 Sous variétés et variétés algébriques affines.

L'étude des variétés toriques fait appel à certains objets de la géométrie algébrique qui sont les sous-variétés et les variétés algébriques affines. Leur étude n'est pas l'objets de ce stage, nous nous contenteront de les définir et de donner quelques propriétés élémentaires, qui pour certaines seront admisent, afin de pouvoir travailler sur les variétés toriques qui n'en sont qu'un exemple.

Définition 2.1. *On se donne une famille de polynomes à n indéterminées* $\mathscr{F} = \{P_i, i \in I\}$*. On appelle sous-variété algébrique affine définie par* $\mathscr{F}$ *le sous-ensemble M de* $\mathbb{C}^n$ *tel que pour tout élément x de M et tout i dans I* $P_i(x) = 0$*.*

Remarque 2.1. *On a qu'une sous variété algébrique affine est un ensemble algébrique, conformément à la définition donnée plus haut.*

Définition 2.2. *Soit M une sous-variété algébrique affine. On appelle idéal associé à M, noté I(M) l'ensemble des polynômes de* $\mathbb{C}[X_1...X_n]$ *dont la restriction à M est nulle. C'est un idéal de* $\mathbb{C}[X_1...X_n]$*.*

Définition-proposition 2.1. *On appelle fonction régulière sur M la restriction à M d'une fonction polynômiale sur* $\mathbb{C}^n$*. L'ensemble des fonctions régulières sur M est noté F(M). C'est une* $\mathbb{C}-alg\grave{e}bre$ *réduite de type fini, isomorphe à* $\mathbb{C}[X_1...X_n]/I(M)$*.*

Définition 2.3. *On appelle variété algébrique affine un triplet* (A, M, Φ) *où A est une* $\mathbb{C}$*-algèbre et* Φ *une bijection de M sur l'ensemble des idéaux maximaux de A. A peut être vu comme une sous-algèbre des fonctions régulières sur M, ses éléments seront ainsi appelés comme tel.*

Définition 2.4. *Soit (A,M) et (B,N) deux variétés algébriques affines. Une application* $f : M \longrightarrow N$ *est appelé morphisme de variétés algébriques affines si pour toute fonction régulière g de F(N) on a* $g \circ f \in F(M)$*.*

Définition 2.5. *Une variété algébrique affine non vide est dite irréductible si l'anneau de ses fonctions régulière (aussi appelé anneau de coordonnée) est intègre.*

Définition 2.6. *Soit M une variété algébrique affine irréductible. On appelle corps des fonctions rationnelles sur M le corps des fractions de l'anneau des fonctions régulières de M.*

Définition 2.7. *On dit qu'un point x d'une variété affine est normal si le localisé de l'anneau des fonctions régulières en l'idéal de fonctions nulles en ce point est intégralement clos. La variété est dîte normale lorsque tous ses points le sont.*

Proposition 2.1. *Une variété algébrique affine irréductible est normale si et seulement si l'anneau de ses fonctions rationnelles est intégralement clos.*

Définition 2.8. *Soit (A,M) une variété algébrique affine. Alors les sous variétés affines de M forment les fermés d'une topologie sur M appelée topologie de Zariski.*

Proposition 2.2. *Avec les notations de la section 1.1 on a :*
$V \longrightarrow I(V)$ *réalise une bijection de réciproque* $I \longrightarrow I(V)$ *entre :*

$i)$ *Les sous-variétés affines de* $\mathbb{C}^n$ *et les idéaux radicaux de* $A = \mathbb{C}[X_1, ..., X_n]$.
$ii)$ *Les sous-variétés affines irréductibles et les idéaux premiers de A.*
$iii)$ *Les points de* $\mathbb{C}^n$ *et les idéaux maximaux de A.*

Démonstration. C'est essentiellement une conséquence du Nullestellensatz. □

Corollaire 2.1. *On a donc une correspondance bijective entre les fermés de la topologie de Zariski sur une variété M et les idéaux radicaux de A.*

Proposition 2.3. *Les fermés de la topologie de Zariski sont des fermés pour la topologie usuelle.*

Démonstration. Soit un F un fermé de zariski, c'est à dire une sous variété affine. On note $\{P_i\}_{i\in I}$ la famille de polynôme associée. Les polynômes sont des fonctions continues pour la topologie usuelle et on a :

$$F = \bigcap_{i\in I} P_i^{-1}(\{0\})$$

qui est fermé comme intersection quelconque de fermés. □

Définition 2.9. *soit M une variété algébrique affine, x un point de M et* I_x *l'idéal maximal de F(M) correspondant, conformément à la proposition 2.2. On appelle espace tangent à M en x, qu'on notera* T_xM *le dual vectoriel du quotient* I_x/I_x^2. *Ses éléments seront appelés vecteurs tangents à M en x.*

Définition 2.10. *On dit qu'un point x d'une variété algébrique est régulier ou lise s'il appartient à une unique composante irréductible de M et si la dimension de l'espace tangent en ce point est égale à la dimension de la composante irréductible de la variété M qui le contient.*
Un point non régulier est dit singulier.
Une variété dont tous les points sont réguliers est dîte non-singulière.

2.2 Cônes, réseaux, tores...

Cette partie a pour but de poser le cadre géométrique et algébrique dans lequel se fera l'étude des variétés toriques.

Définition 2.11. *Soit un V un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel de dimension finie. On appellera un réseau de V un sous-groupe de V engendré par une base. La dimension de V s'appelle le rang du réseau considéré.*

Remarque 2.2. *Un réseau de V est un* $\mathbb{Z}$*-module engendré par la base considérée.*

Proposition 2.4. *Soit V un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel de dimension finie. Alors on a équivalence entre :*

$i)$ *N est un réseau de V.*
$ii)$ *N est discret et engendre V en tant qu'espace vectoriel.*

Démonstration. ı) ⇒ ii) :
Si N est un réseau il est évidement discret en tant que $\mathbb{Z}$-module. Soit $(x_1...x_n)$ une base de N. Par définition d'un réseau c'est une base de V. Ainsi N engendre bien V en tant qu'espace vectoriel.
ı) ⇒ ii) :
N est non vide et inclus dans V. Si x et y sont dans N, x-y sont dans V. Comme N engendre V x-y est dans N. Donc N est un sous groupe de V. N engendrant V comme espace vectoriel de dimension finie, il existe une base de V incluse dans N et donc N est un réseau. □

Définition 2.12. *Soit N un réseau d'un espace vectoriel V. On appelle dual de N l'ensemble, noté $N^\vee$, l'ensemble des formes linéaires de V entières sur N. C'est-à-dire : $N^\vee = \{\phi \in V^*,\ \phi_{|N} \in \mathbb{Z}\}$.*

Remarque 2.3. *On a alors que $N^\vee$ est un réseau de V^*.*

Exemple 1. *le réseau $\mathbb{Z}^2$*

Définition 2.13. *Soit N un réseau sur V. On appelle tore associé à N le groupe, noté T_N, des homomorphismes de $N^\vee$ dans $\mathbb{C}^*$*

Proposition 2.5. *Si N est un réseau de rang n alors T_N est isomorphe à $(\mathbb{C}^*)^n$.*

Démonstration. Si N est de dimension r, notons $N^\vee = M =< m_1, ..., m_r >$. On a alors qu'un morphisme de groupe de M dans $\mathbb{C}^*$ est entièrement déterminé par la valeur qu'il prend en chacun des m_i. D'où la proposition. □

Définition 2.14. *Soit V un espace vectoriel réel de dimension finie r. On appelle cône polyédral convexe sur V tout ensemble de la forme $\sigma = \{\sum_{j=1}^{t} v_i r_i,\ \ v_i \geq 0, i = 1...t\}$ avec $t \leq r$ et $v_i \in V$ pour $i = 1...r$. Si σ ne contient pas de droites (i.e si v_i est élément du cône $(-v_i)$ ne l'est pas) on dit que le cône est fortement convexe.*

Définition 2.15. *Soit σ un cône polyédral convexe. On appelle dual de σ, que l'on note $\sigma^\vee$, l'ensemble des formes linéaires de V^* positives sur σ.*

Remarque 2.4. *$\sigma^\vee$ a une structure de semi-groupe (=monoïde) commutatif c'est à dire possède une loi de composition interne associative (ici l'addition) possédant un élément neutre (la forme linéaire nulle) et commutative.*

Définition 2.16. *On appelle face d'un cône polyédrale convexe l'ensemble des zéros d'une forme linéaire positive sur σ. On dit alors qu'une telle forme linéaire définit la face en question. Si τ est un face de σ alors on a $m_0 \in \sigma^\vee$ tel que $\tau = \sigma \cap \{m_0\}^\perp$.*
Si τ est différent de σ on dit que la face est propre.

Proposition 2.6. *Le dual d'un cône polyédral convexe est un cône polyédral convexe de V^* et par dualité le dual du dual est le cône de départ.*

Démonstration. Admise. □

Définition 2.17. *Soit N un réseau de V et σ un cône sur V. On dit que σ est rationnel sur N si on peut choisir un système fini de générateurs de σ parmi les éléments de N.*

Définition 2.18. *On appelle éventail une collection Δ non vide de cônes polyédraux fortement convexes respectant les propriétés suivantes :*

- *Pour tout σ de Δ, toute face de σ est élément de Δ.*
- *Pour tout σ, σ' de Δ, $\sigma \cap \sigma'$ est une face des deux cônes.*
- *On appelle support de Δ :*

$$|\Delta| = \cup_{\sigma \in \Delta} \sigma$$

On dit que l'éventail est complet si son support est égal à l'espace V tout entier.

3 Variétés toriques : définition et propriétés.

On se donne donc comme cadre un espace vectoriel V sur $\mathbb{R}$ et N un réseau sur V. On traitera comme nous le permet la remarque 1.1 N comme un $\mathbb{Z}$-module. De plus tous les cônes polyédraux de V considérés seront pris fortement convexes et rationnels sur N. On pose alors les notations suivantes :

- $N =< n_1, ..., n_r >$
- $M = N^{\vee} =< m_1, ..., m_r >$
- Pour un cône σ sur V on note $S_\sigma = M \cap \sigma^{\vee}$, c'est à dire les formes linéaires de V^* positives et entières sur σ.

Nous allons définir plusieurs applications nécessaires pour la proposition qui va suivre. Plutôt que de faire une liste exaustive, il a été choisi de faire un schéma récapitulatif globale permettant de mieux visualiser chaque application et les espaces mis en jeu.

$N = \langle m_1, \dots, m_r \rangle$

$M = \langle m_1, \dots, m_r \rangle$

$m \mapsto \gamma_m$

$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{C}^*, T_N)$

$m \mapsto \gamma_m(z)(m) = z^{m(n)}$

$m \mapsto e(m)$

$\forall i \in [\![1; r]\!]$, $u_i := e(m_i)$

$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(T_N, \mathbb{C}^*)$

$z \to \gamma_m(z)$

$\mathbb{C}^*$

$T_N = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{C}^*)$

$t \mapsto e(m)(t) = t(m)$

$z \to \varphi \circ \gamma_m(z)$

$\sim \varphi : t \mapsto (u_1(t), \dots, u_r(t))$

$= (t(m_1), \dots, t(m_r))$

$(\mathbb{C}^*)^r$

$= (\gamma_m(z)(m_1), \dots, \gamma_m(z)(m_r))$

$= \left(z^{\sum_{i=1}^{r} b_i m_1(m_i)}, \dots, z^{\sum_{i=1}^{r} b_i m_r(m_i)} \right)$

$= (z^{b_1}, \dots, z^{b_r})$

Proposition 3.1. *Soit σ un cône sur V et $S_\sigma = \mathbb{N}s_1 + ... + \mathbb{N}s_p$. On pose $U_\sigma = \{u : S_\sigma \to \mathbb{C}; u(0) = 1 \;\; et \;\; u(m+m') = u(m)u(m'), \forall m, m' \in S_\sigma\}$ ainsi que : pour tout $(m,u) \in S_\sigma \times U_\sigma$ $\mathfrak{e}(m)(u) = u(m)$.*
Alors l'application

$$(\mathfrak{e}(s_1), ..., \mathfrak{e}(s_p)) : \;\; U_\sigma \longrightarrow \mathbb{C}^p = \mathbb{C} \times \mathbb{C} \cdots \times \mathbb{C}$$

est injective. Identifié à son image par cette application, U_σ est un sous-ensemble algébrique de $\mathbb{C}^p$ défini comme l'ensemble des solutions d'un système d'équations de la forme (monôme)=(monôme). U_σ a ainsi une structure de sous-variété algébrique affine irréductible normale de dimension r induite par la structure naturelle de son plongement dans $\mathbb{C}^p$. Cette structure est indépendante du choix du système de générateurs de M.

Démonstration. • $(s_1, ..., s_p)$ engendre S_σ donc les éléments de U_σ sont entièrement déterminés par leurs valeurs en chacun des s_i, on a donc bien l'injectivité de l'application.
• Soit ϕ le morphisme d'algèbre qui envoie respectivement les X_i sur les $\mathfrak{e}(m_i)$. On a alors le diagramme commutatif suivant, en notant I le noyau de ϕ; le morphisme $\tilde{\phi}$ obtenu est alors un isomorphisme d'algèbres.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C}[X_1, ..., X_p] \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathbb{C}[\mathfrak{e}(s_1), ..., \mathfrak{e}(s_p)] \\
\mathbb{C}[X_1, ..., X_p]/I \arrow[ur, "\tilde{\phi}"'] &
\end{tikzcd}$$

Soit a un élément de $\mathbb{C}^p$. On cherche une condition nécessaire et suffisante pour que l'on ait un élément u_a de U_σ tel que pour tout i on ait $u_a(s_i) = a_i$. On a une bijection entre $\mathbb{C}^p$ et les morphisme d'algèbres de $\mathbb{C}[X_1, ..., X_p]$ et $\mathbb{C}$ via l'application qui envoie a sur le morphisme d'évaluation en a ϕ_a, c'est à dire qui envoie respectivement les X_i sur les a_i. On considère le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C} & \mathbb{C}[X_1, ..., X_p] \arrow[l, "\phi_a"'] \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathbb{C}[\mathfrak{e}(s_1), ..., \mathfrak{e}(s_p)] \\
& \mathbb{C}[X_1, ..., X_p]/I \arrow[ul, dotted, "?"] \arrow[ur, "\tilde{\phi}"'] &
\end{tikzcd}$$

On a donc un élément de U_σ qui envoie $\mathfrak{e}(s_i)$ sur a_i si et seulement si on peut faire commuter le diagramme de gauche par le propriété universelle du quotient. Soit si et seulement si I est inclut dans $ker(\phi_a) = (X_1, ..., X_n)$. Soit si et seulement si tout élément P de I s'annule en a. Cela nous donne donc que U_σ a une structure de sous-variété algébrique affine.

• Soit f un élément de I, en l'explicitant on a :

$$\begin{aligned}
0 = f(\mathfrak{e}(s_1), ..., \mathfrak{e}(s_p)) &= \phi(\sum_k b_k X_1^{\alpha_{1,k}} ... X_p^{\alpha_{p,k}}) \\
&= \sum_k b_k(\alpha_{1,k}\mathfrak{e}(s_1) + ... + \alpha_{p,k}\mathfrak{e}(s_p)).
\end{aligned}$$

On voit ainsi que Les éléments de I sont ceux de la forme

$$X_1^{\alpha_1} ... X_p^{\alpha_p} - X_1^{\mu_1} ... X_p^{\mu_p}$$

tels que $\alpha_1\mathfrak{e}(s_1)+...+\alpha_p\mathfrak{e}(s_p)=\mu_1\mathfrak{e}(s_1)+...+\mu_p\mathfrak{e}(s_p)$. Donc les éléments de U_σ (sous-entendu ceux de son plongement dans $\mathbb{C}^p$) sont solutions d'un système d'équations de la forme (monôme)=(monôme).

• L'aneau des fonctions régulières de U_σ est $\mathbb{C}[S_\sigma]$ qui est un sous-anneau de $\mathbb{C}[M]$ qui est intègre donc est un anneau intègre. En effet $\mathbb{C}[M]=\mathbb{C}[m_1,(-m_1),...,m_r,(-m_r)]$. Les m_i étant linéairement indépendant, on a un isomorphisme en entre $\mathbb{C}[M]$ et l'anneau des polynômes de Laurent qui est intègre. Donc U_σ est irréductible.

• Nous allons maintenant montrer que U_σ est normale en utilisant la proposition 2.1. Il s'agit donc de montrer que l'anneau des fonctions régulières $\mathbb{C}[S_\sigma]$ est intégralement clos. σ est fortement convexe, ainsi l'espace dual engendré par son cône dual est le dual de V tout entier. Ainsi $S_\sigma+(-S_\sigma)=M$. donc pour tout élément m de M on peut écrire $m=s_1-s_2$ avec s_1 et s_2 respectivement dans S_σ et $-S_\sigma$. Ainsi : $\mathfrak{e}(m)=\frac{\mathfrak{e}(s_1)}{\mathfrak{e}(s_2)}$. Donc le corps des fractions de $\mathbb{C}[S_\sigma]$ est le même que celui de $\mathbb{C}[M]$. Dire qu'un élément de M est dans S_σ revient à dire qu'il prend des valeurs positives sur les face de dimension 1. Ainsi si $(v_1,...,v_p)$ est un système générateur de σ alors $\mathbb{C}[S_\sigma]$ est l'intersection des $\mathbb{C}[S_{v_i}]$. Les lemmes 4.1 et 4.2 (annexe) donnent donc que $\mathbb{C}[S_\sigma]$ et intégralement clos comme intersection d'anneaux intégralement clos.
• On a que $\mathbb{C}[S_\sigma]=\mathbb{C}[\mathfrak{e}(s_1),...,\mathfrak{e}(s_p)]=\mathbb{C}[\mathfrak{e}(s_1),...,\mathfrak{e}(s_r)][\mathfrak{e}(s_{r+1}),...,\mathfrak{e}(s_p)]$ où, quitte à réordonner, on a choisi les r premiers s_i linéairement indépendants. les $\{\mathfrak{e}(s_{r+1}),...,\mathfrak{e}(s_p)\}$ sont donc algébriques sur $\{\mathfrak{e}(s_1),...,\mathfrak{e}(s_r)\}$ donc la dimension de $\mathbb{C}[S_\sigma]$ est donc celle de $\mathbb{C}[\mathfrak{e}(s_1),...,\mathfrak{e}(s_r)]$. Donc $\mathbb{C}[S_\sigma]$ est de dimension r par le corollaire 4.1.

□

Proposition 3.2. *Soit σ un cône polyédrale fortement convexe sur V, τ une face de σ et m_0 une forme linéaire définissant τ. On à alors :*

— *τ est un cône polyédral fortement convexe sur σ*
— *$S_\tau=S_\sigma+\mathbb{N}(-m_0)$ et donc :*

$$U_\tau=\{u\in U_\sigma:\ \ u(m_0)\neq 0\},$$

qui est un ouvert de U_σ.

Démonstration. On a $U_\tau^c=\{u\in U_\sigma:\ \ u(m_0)=0\}$. C'est un fermé pour la topologie de zariski (cela définit bien une sous variété affine par la proposition précédente) donc pour la topologie usuelle.

□

Le théorème suivant nous donne la définition d'une variété torique.

Théorème 3.1. *Soit Δ un éventail. On peut alors recoller naturellement $\{U_\sigma,\ \sigma\in\Delta\}$ ensemble pour obtenir une variété algébrique affine séparée :*

$$V_{\Delta,N}=\bigcup_{\sigma\in\Delta}U_\sigma,$$

qui est irréductible, normale et de dimension r. On l'appelle variété torique associée à (Δ,N).

Démonstration. • Soit σ un cône de Δ et τ une face de σ. On pose l'application

$$i_{\tau,\sigma} : U_\tau \hookrightarrow U_\sigma$$

l'injection naturelle, continue et ouverte d'après la proposition précédente. On pose alors sur $\coprod_{\sigma\in\Delta} U_\sigma$ la relation $\mathscr{R}$ suivante :

$$(\tau, x_\tau)\mathscr{R}(\sigma, x_\sigma) \quad \Leftrightarrow \quad \exists x_{\sigma\cap\tau} \in \sigma \cap \tau, \left\{ \begin{array}{l} i_{\sigma\cap\tau,\sigma}(x_{\sigma\cap\tau}) = x_\sigma \\ i_{\sigma\cap\tau,\tau}(x_{\sigma\cap\tau}) = x_\tau \end{array} \right.$$

On a alors $V_{\Delta,N} = \coprod_{\sigma\in\Delta} /\mathscr{R}$. On pose π la projection quotient associée, qui est par construction ouverte et continue. On définit de la même manière pour $\sigma \in \Delta$ l'injection
$i_\sigma : U_\sigma \hookrightarrow V_{\Delta,N}$
• Il reste désormais à montrer que l'espace X ainsi construit est séparé. Soit x et y deux éléments distincts de $V_{\Delta,N}$, on va montrer qu'il éxiste $\mathscr{O}_x$ et $\mathscr{O}_y$ deux ouverts de $V_{\Delta,N}$ distincts qui contiennent respectivement x et y. Soit (τ, y_τ) et (σ, x_σ) deux éléments de $\coprod_{\sigma\in\Delta} U_\sigma$ tels que $\pi((\sigma, x_\sigma)) = i_\sigma(x_\sigma) = x$ et $\pi((\tau, y_\tau)) = i_\tau(y_\tau) = y$.
On pose g_σ (resp. g_τ) l'application qui plonge U_σ (resp. U_τ) dans $\mathbb{C}^p$ (resp.$\mathbb{C}^q$), on notera $\tilde{U_\sigma}$ et $\tilde{U_\tau}$ leurs images respectives. On pose de même :

$$\begin{tikzcd} U_{\sigma\cap\tau} \arrow[r, "f_{\sigma\cap\tau}"] & \mathbb{C}^{p+q} \\ & U_\sigma \times U_\tau \arrow[u, "g_{\sigma,\tau}=(g_\sigma,g_\tau)"'] \end{tikzcd}$$

Où $f_{\sigma\cap\tau} = (i_\sigma, i_\tau)$. Il faut cependant justifier les écritures précédentes, à savoir que une fois plongés dans $\mathbb{C}^{p+q}$ on puisse identifier les éléments de $U_{\sigma\cap\tau}$ avec ceux de U_σ et de U_τ. La proposition 3.1 nous dit que les éléments de U_σ s'identifie à des éléments de $\mathbb{C}^p$ solutions d'équations de la forme (monôme) = (monôme). Or ces monômes sont exactement les éléments de S_σ. Il faut donc montrer qu'à partir d'un système générateur de S_σ et de S_τ on puisse extraire un système générateur de $S_{\sigma\cap\tau}$. On a :

$$\begin{aligned} S_{\sigma\cap\tau} &= N \cap (\sigma\cap\tau)^\vee \\ &= N \cap (\sigma^\vee + \tau^\vee) \\ &= (N\cap\sigma^\vee) + (N\cap\tau^\vee) \\ &= S_\sigma + S_\tau. \end{aligned}$$

Ainsi les identifications des éléments de $\tilde{U_{\sigma\cap\tau}}$ avec les éléments communs à $\tilde{U_\sigma}$ et $\tilde{U_\tau}$ sont légitimes.
On a alors la série d'équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} x \neq y &\Leftrightarrow \pi((\sigma, x_\sigma)) \neq \pi((\tau, y_\tau)) \\ &\Leftrightarrow (\sigma, x_\sigma)\not\mathscr{R}(\tau, y_\tau) \\ &\Leftrightarrow g_{\sigma,\tau}(x_\sigma, y_\tau) \not\in \tilde{U_{\sigma\cap\tau}} \\ &\Leftrightarrow g_{\sigma,\tau}(x_\sigma, y_\tau) \in H = U_\sigma \tilde{\times} U_\tau \setminus \tilde{U_{\sigma\cap\tau}} \end{aligned}$$

$U_\sigma \tilde{\times} U_\tau$ et $\tilde{U_{\sigma\cap\tau}}$ sont des fermés de zariski, donc d'après la proposition 2.3 H est un ouvert pour la topologie usuelle de $\mathbb{C}^{p+q}$. On peut donc considérer $\mathscr{B} = \mathscr{B}_1 \times \mathscr{B}_2$ une boule de $\mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^q$ qui ne rencontre pas $\tilde{U_{\sigma\cap\tau}}$ mais qui contient $g_{\sigma,\tau}(x_\sigma, y_\tau)$ (avec $\mathscr{B}_1 \subset \mathbb{C}^p$ et $\mathscr{B}_2 \subset \mathbb{C}^q$).

Ainsi, posons $B_0 = g_\sigma^{-1} \circ \pi^{-1}(\mathscr{B}_1 \cap \tilde{U_{\sigma\cap\tau}})$ et $B_1 = g_\tau^{-1} \circ \pi^{-1}(\mathscr{B}_2 \cap \tilde{U_{\sigma\cap\tau}})$. On a alors B_1 qui est un ouvert de U_σ contenant x_σ mais aucun élément de la classe de y. Réciproquement, B_2 qui est un ouvert de U_τ contenant y_τ mais aucun élément de la classe de x. Ainsi $\pi(\{\sigma\} \times B_1)$ est un ouvert de $V_{\Delta,N}$ qui contient x mais pas y et $\pi(\{\tau\} \times B_2)$ est un ouvert de $V_{\Delta,N}$ qui contient y mais pas x. D'où la proposition.

□

On appelle $V_{\Delta,N}$ variété torique pour la raison suivante ; on sait que chaque face de Δ contient $\{0\}$, et on a de manière évidente que $S_0 = M$. Ainsi, $U_0 = T_N$ qui est par la proposition 3.2 un ouvert de U_σ. Ainsi toute variété torique contient le tore comme ouvert. De plus on a une action naturelle du tore sur $V_{\Delta,N}$: soit u un élément de U_σ et t dans T_N. Alors on pose pour m dans M :

$$(tu)(m) = t(m)u(m).$$

On a de manière évidente que (tu) est un élément de U_σ. Ainsi par le théorème de recollement plus haut on a l'action de T_N sur $V_{\Delta,N}$.

Définition 3.1. *Soit N et N' deux réseaux de V et V' deux espaces vectoriels. Soit maintenant U_σ et $U_{\sigma'}$ deux variétés toriques affines. Soit ϕ de n dans N' un morphisme tel que son extansion linéaire $\phi_\mathbb{R}$ soit telle que $\phi_\mathbb{R}(\sigma) \subset \sigma'$. Alors par dualité on a un morphisme de M dans M' qui envoit donc S_σ sur $S_{\sigma'}$, que l'on peut étendre en un morphisme de $\mathbb{C}[S_\sigma]$ dans $\mathbb{C}[S_{\sigma'}]$. Un tel morphisme induit un morphisme de variétés affines entre U_σ et $U_{\sigma'}$ apelé morphisme torique.*

Théorème 3.2. *Une variété affine U_σ est non singulière <u>si et seulement si</u> le cône σ qui la définit est engendré par une partie $(v_1, ..., v_k)$ qui peut être complétée en une base de N.*
On a alors que U_σ est toriquement isomorphe à la variété torique $\mathbb{C}^k \times \mathbb{C}^{r-k}$.

Démonstration. <u>• $\Longleftarrow$:</u>
On a ϕ un isomorphisme de N dans $\mathbb{Z}^n$ qui envoit chaque v_i sur le i-ème vecteur de la base canonique. Donc $\phi_\mathbb{R}$ envoie σ sur $\mathbb{R}_+^k \times (\{0\})^{r-k}$ dont la variété torique associée en tant que cône est $\mathbb{C}^k \times (\mathbb{C}^*)^{r-k}$. Celle ci est lisse. En effet Soit x un point de cette variété. Alors le Nullstellensatz nous donne que $I_x = (X_1 - x_1, ..., X_r - x_r)$. Alors dans le quotient par $I_x^2 = ((X_i - x_i)(X_j - x_j))_{1\leq i,j\leq r}$ il ne restera que les termes de la forme $z(X_i - x_j)$ et sa dimension est bien r. On a bien un isomorphisme torique et donc l'implication voulue.

<u>• $\Longrightarrow$</u>
<u>Premier cas : σ engendre V :</u>
• On remarque tout d'abord que comme σ est fortement convexe alors $\sigma^\vee$ l'est. Soit A l'ensemble des éléments de $\mathbb{C}[S_\sigma]$ dont le terme constant est nul (sous-entendu le terme représentant une application constante de S_σ dans $\mathbb{C}$ est nul). Cet ensemble est un idéal maximal.C'est un idéal : conformément aux notations de la proposition 3.1 on a :

$$A = \bigoplus_{m \in S_\sigma \setminus \{0\}} \mathfrak{e}(m).$$

Donc A est un idéal si et seulement si pour tout m dans S_σ et tout m' non nul dans S_σ on a $\mathfrak{e}(m)\mathfrak{e}(m') = \mathfrak{e}(m+m')$ est élément de A. Soit si et seulement si $\mathfrak{e}(m+m') \neq \mathfrak{e}(0)$. Comme $\sigma^\vee$ est fortement convexe on est bien dans ce cas-là. Montrons maintenant que A est maximal.

Soit I un idéal contenant A. Soit P un élément de I qui n'est pas dans A. Alors P est de la forme :

$$P(X) = \sum_{s_i \in S_\sigma \setminus \{0\}} a_i X^{s_i} + a_0.$$

avec a_0 non nul. Comme A est inclus dans I et que I est un idéal $\sum_{s_i \in S_\sigma \setminus \{0\}} a_i X^{s_i}$ est un élément de I et $a_0 = P(X) - \sum_{s_i \in S_\sigma \setminus \{0\}} a_i X^{s_i}$ est aussi un élément de I. a_0 étant non nul I contient un inversible donc est L'anneau tout entier. Donc A est maximal.

• Ainsi, A^2 est engendré par les $X^{s+s'}$ avec s et s' non nuls dans $\S_\sigma$. Ainsi le quotient M/M^2 est engendré par les X^s où s est un élément non nul de S_σ et non différence de deux éléments non nuls de S_σ. Or ces éléments engendrent S_σ en tant que semi-groupe et donc, $\sigma^\vee$ étant fortement convexe (car σ l'est) on a que ces éléments engendrent M. Soit x le point de U_σ correspondant à M (cf. proposition 2.2). Par hypothèse ce point est lisse donc les éléments précédents sont au nombre de r. Ils forment donc une base de M. Donc leur base duale est une base duale de N (car $(M^\vee)^\vee = N$) d'où l'implication pour le cas où σ engendre V.

<u>Deuxième cas : σ n'engendre pas V.</u>

Supposons maintenant que σ n'engendre pas V. Soit V' le sous-espace de V engendré par σ et k sa dimension. Soit $N' = N \cap V'$ le réseau associé. On note U_σ la variété torique définie par σ dans V et U'_σ celle définie dans V'. On a alors :

$$U_\sigma = U'_\sigma \cup T_{N'}.$$

En effet, un élément de V' vu dans V est de la forme $(x_1, .., x_k, 0, ..., 0)$. Donc $\tau = \{\sum a_i e_i,\ \ i = 1, ..., k\}$ est une face de σ, donc U_τ est un ouvert de U_σ et on montrera dans le premier exemple de la prochaine partie que $U_{\{0\}} = T_N$. Ainsi U_σ est lisse si U'_σ l'est soit, par le cas précédent, si σ est engendré par une base de N'. Une base de N' pouvant être complétée en une base de N on a le résultat. D'où la deuxième implication et le théorème.

□

Proposition 3.3. *Soit Δ un éventail. Pour tout $\sigma \in \Delta$ on pose :*

$$orb(\sigma) = \{u \in M \cap \sigma^\perp \to \mathbb{C}^*,\ \ homomorphisme\}.$$

Alors $orb(\sigma)$ correspond à l'orbite de σ sous l'action du tore sur Δ. On a de plus les propriétés suivantes :

- $i)$ *$orb(\{0\}) = U_{\{0\}} = T_N$*
- $ii)$ *La dimension de $orb(\sigma)$ au sens de Krüll est égale à $r - dim(\sigma)$ où la dimension de σ est celle de l'espace vectoriel qu'il engendre.*
- $iii)$ *Pour σ et τ deux éléments de Δ, τ est ue face de σ <u>si et seulement si</u> $orb(\sigma) \subset \overline{orb(\tau)}$.*
- $iv)$ *Pour σ dans Δ, $orb(\sigma)$ est l'unique T_N-orbite fermée dans U_σ, on a de plus :*

$$U_\sigma = \coprod_{\tau \leq \sigma} orb(\tau)$$

- $v)$ *Soit n un élément de N et σ un élément de Δ. Alors $n \in \sigma$ <u>si et seulement si</u> $\lim_{z \to 0} \gamma_n(z)$ existe dans U_σ. Dans ce cas, la limite coïncide avec l'élément neutre de $orb(\tau)$, vu comme un tore algébrique, où τ est la plus grande face de σ qui contient n dans son intérieur relatif.*

Démonstration. *i*)

$$\begin{aligned} orb(\{0\}) &= \{u \in M \cap \{0\}^{\perp} \to \mathbb{C}^*, \;\; homomorphisme\} \\ &= \{u \in M \to \mathbb{C}^*, \;\; homomorphisme\} \\ &= U_0 \\ &= T_N. \end{aligned}$$

ii) On a vu que $U_\sigma = \{u \in M \cap \sigma^\vee \to \mathbb{C}^*, \;\; homomorphisme\}$ était de dimension r, c'est à dire de la dimension de l'epace vectoriel engendré par σ qui est de dimension maximal car le cône est fortement convexe. Donc $\sigma^\perp$ étant un espace vectoriel de dimension $r - dim(\sigma)$ on a bien que $orb(\sigma)$ est de dimension $r - dim(\sigma)$.

v) Pour tout m élément de $M \cap \sigma^\vee$, $\gamma_n(z) = z^{<m,n>}$ admet une limite si et seulement si <m,n> est positif pour tout m élément de S_σ soit si et seulement si n est dans σ. Dans ce cas on a bien que pour tout élément m de $l'orb(\tau)$ définit dans l'énoncé on a $\lim_{z\to 0} \gamma_n(z)(m) = 1$.

— $orb(\sigma)$ est une T_N-orbite.
Lorsque l'on dit ici que $orb(\sigma)$ est une orbite de l'action du tore sur U_σ, c'est dans le sens où l'on va la plonger dans U_σ et que son plongement sera l'orbite recherchée.
On pose :

$$\begin{aligned} \phi : orb(\sigma) &\hookrightarrow U_\sigma \\ u \in Hom(M \cap \sigma^\perp, \mathbb{C}^*) &\to \tilde{u} \end{aligned}$$

où $\tilde{u}$ est le prolongement de u à S_σ qui a m associe 0 si m n'est pas dans $\sigma^\perp$ et $u(m)$ sinon. On montre d'abord que $\phi(orb(\sigma))$ est stable sous l'action de T_N. Soit donc t un élément du tore u dans $orb(\sigma)$. On montre que $t.\tilde{u}$ est dans $\phi(orb(\sigma))$. soit m dans S_σ, on a :

$$\begin{aligned} (t.\tilde{u})(m) &= t(m).\tilde{u}(m) \\ &= t(m)u(m), \;\; si \;\; m \in M \cap \sigma^\perp \\ &= 0, \;\; sinon. \end{aligned}$$

Donc $t.\tilde{u} = \bar{t}.u$ où $\bar{t}$ est la restriction de t à $M \cap \sigma^\perp$. Cela définit bien un élément de $orb(\sigma)$ comme produit de deux éléments de $orb(\sigma)$. Ainsi $\phi(orb(\sigma))$ est stable sous l'action du tore algébrique.

iv)

iii) • $orb(\sigma) \subset \overline{orb(\tau)}$.
On a donc que $U_\sigma \cap orb(\tau)$ n'est pas vide, donc, U_σ contient $orb(\tau)$ car est stable sous l'action du tore. Donc, d'après *iv*), comme $U_\sigma = \coprod_{\tau \leq \sigma} orb(\tau)$ on a bien que τ est une face de σ.

• τ est une face de σ.
Soit i l'élémentde de $orb(\tau)$ définit par $i(m) = 1$ pour tout $m \in M \cap \tau^\perp$. soit n un élément de N qui est dans l'intérieur de σ. Alors pour tout $m' \in M \cap \sigma^\vee \cap (\tau^\perp \setminus \sigma^\perp)$ on a $< m, m' > \; > 0$. On a $\gamma_n(z) \in T_N$ et $i \in orb(\tau)$, donc $(\gamma_n(z).i) \in orb(\tau)$. On a alors : $(\gamma_n(z).i)(m) = \gamma_n(z)(m).i(m) = \gamma_n(z)$. Ainsi en notant u_0 la limite de $\gamma_n(z)$ lorsque n tend vers zéro on obtient :

$$\begin{array}{rcl} u_0(m) & = & 1 \;\; si \;\; m \in \sigma^{\perp} \\ & = & 0 \;\; si \;\; m \in M \cap \sigma^{\vee} \cap (\tau^{\perp} \setminus \sigma^{\perp}) \end{array}$$

Donc u_0 est élé ment de $\phi(orb(\sigma))$. Donc $orb(\sigma) \cap orb(\tau)$ est non vide donc par stabilté sous l'action de T_N on a $orb(\sigma) \subset orb(\tau)$. D'où l'assertion.

□

Théorème 3.3. *Soit Δ un éventail fini. Alors $V_{\Delta,N}$ est compact pour la topologie complexe si et seulement si le support de Δ est égal à V.*

Démonstration. On ne montrera ici que la première implication, la seconde demandant des outils qui n'ont pas été abordés. On suppose donc que $V_{\Delta,N}$ est compact.

— $(U_\sigma)_{\sigma\in\Delta}$ est un recouvrement par des ouverts de $V_{\Delta,N}$. Soit Δ' l'ensemble des cônes maximaux pour l'inclusion. Alors $(U_\sigma)_{\sigma\in\Delta'}$ est un recouvrement d'ouverts de $V_{\Delta,N}$. Donc par l'assertion iii) de la proposition 3.3 tout sous-ensemble propre de $(U_\sigma)_{\sigma\in\Delta'}$ ne peut être un recouvrement de $V_{\Delta,N}$. Donc l'hypothèse de compacité et le fait que $(U_\sigma)_{\sigma\in\Delta}$ soit un recouvrement par des ouverts nous donne que Δ' est fini et donc que, étant en dimension finie, Δ est fini.

— Soit n ∈ N. L'application

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{C}^* & \to & V_{\Delta,N} \\ z & \to & \gamma_n(f) \end{array}$$

a une limite dans $V_{\Delta,N}$ lorsque z tend vers zéro car $V_{\Delta,N}$ est compact. Ainsi par l'assertion iv) de la proposition précédente n est dans Δ. Comme N engendre V comme espace vectoriel on a bien que le support de Δ est égal à V.

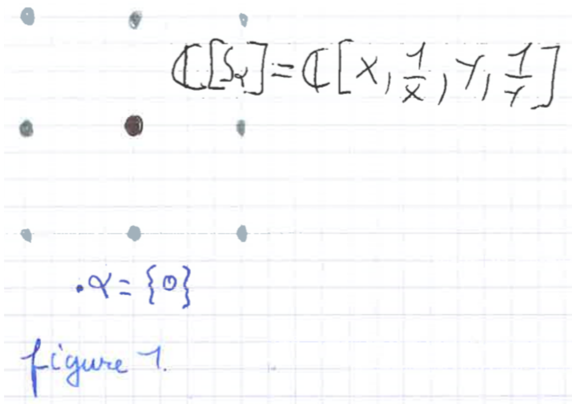
□

4 Construction d'une variété torique.

Nous allons dans cette section construire une variété torique. On prendra comme espace vectoriel $V = \mathbb{R}^2$ sur lequel on prend comme réseau $\mathbb{Z}^2$. On peut ici grâce au théorème de Riesz et au produit scalaire usuel identifier toute forme linéaire ϕ de V^* à l'unique vecteur x_ϕ tel que pour tout élément y de V $\phi(y) =< x_\phi, y >$. Ainsi on pose :

$$\begin{array}{rcl} m_1 & = & <(1,0), \bullet> \\ m_2 & = & <(0,1), \bullet> \\ (-m_1) & = & <(-1,0), \bullet> \\ (-m_2) & = & <(0,-1), \bullet> \end{array}$$

$\underline{\alpha = \{0\}}$



On a ici que l'ensemble des formes linéaires entières et positives sur α est exactement l'ensemble des éléments du réseau $\mathbb{Z}^2$. Soit $S_\alpha = \mathbb{N}m_1 + \mathbb{N}(-m_1) + \mathbb{N}m_2 + \mathbb{N}(-m_2)$. L'algèbre des applications de S_α dans $\mathbb{C}$ s'écrit alors $\mathbb{C}[X, \frac{1}{X}, Y, \frac{1}{Y}]$. On a alors :

$$\mathbb{C}[S_\alpha] = \mathbb{C}[U, V, W, T]/(UV - 1, WT - 1).$$

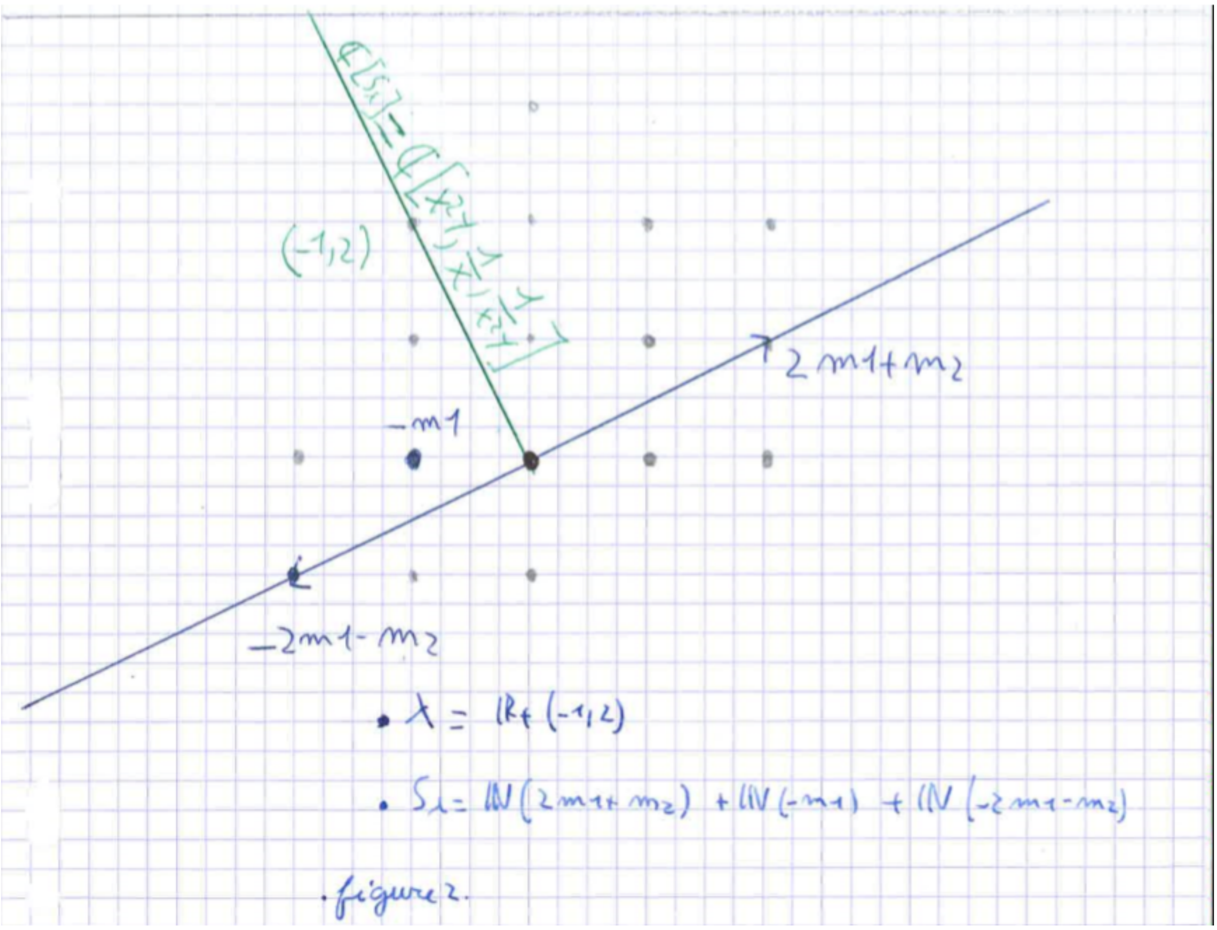
Le deuxième point de la preuve de la proposition 3.1 nous permet donc de décrire U_α :

$$U_\alpha = \{(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{C}^4 | z_1 z_2 = 1, z_3 z_4 = 1\}$$

On a une correspondance entre U_α et $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ via :

$$\begin{array}{rcl} U_\alpha & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^* \\ (z_1, z_2, z_3, z_4) & \longrightarrow & (z_1, z_3) \\ \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^* & \longrightarrow & U_\alpha \\ (u_1, u_2) & \longrightarrow & (u_1, \dfrac{1}{u_1}, u_2, \dfrac{1}{u_2}) \end{array}$$

$\underline{\lambda = \mathbb{R}_+(-1, 2)}$



On cherche ici à déterminer les formes linéaires positives sur λ. Par identification de V^* avec les vecteurs du plan, celles ci vont donc être déterminées par l'ensemble des vecteurs dont le produit scalaire avec (-1,2) est positif. Cet ensemble est précisement celuis des vecteurs situés au dessus de l'orthogonale à la demi-droite λ. On a alors :

$$S_\lambda = \mathbb{N}(2m_1 + m_2) + \mathbb{N}(-m_1) + \mathbb{N}(-2m_1 - m_2).$$

Ainsi : $\mathbb{C}[S_\lambda] = \mathbb{C}[X^2Y, \frac{1}{X}, \frac{1}{X^2Y}] = \mathbb{C}[U,V,W]/(UW-1)$.

D'où : $U_\lambda = \{(z_1,z_2,z_3) \in \mathbb{C}^3 | z_1z_3 = 1\}$.

Il y a correspondance entre U_λ et $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$ via :

$$\begin{array}{rcl} U_\lambda & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \times \mathbb{C} \\ (z_1,z_2,z_3) & \longrightarrow & (z_1,z_2) \\ \mathbb{C}^* \times \mathbb{C} & \longrightarrow & U_\lambda \\ (u_1,u_2) & \longrightarrow & (u_1,u_2,\dfrac{1}{u_1}) \end{array}$$

<u>$\sigma_1 = \mathbb{R}_+(-1,2) + \mathbb{R}_+(2,-1)$</u>

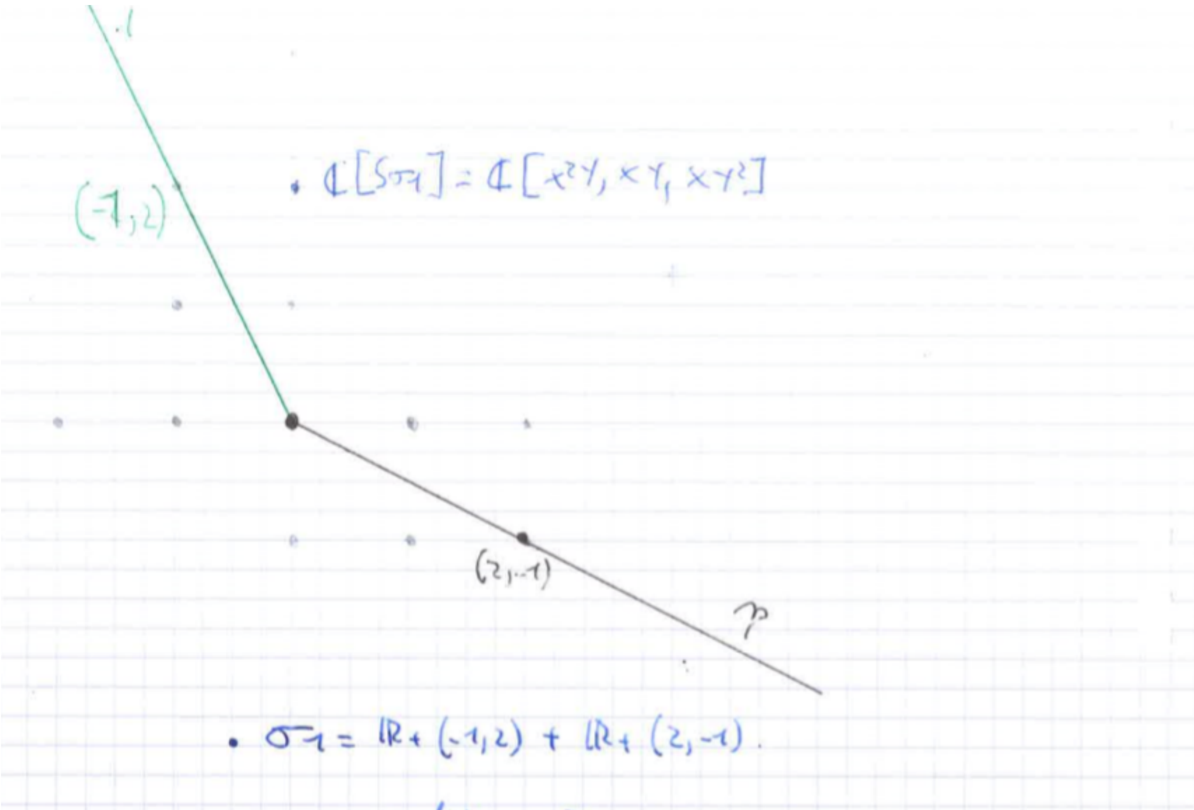


figure 3.

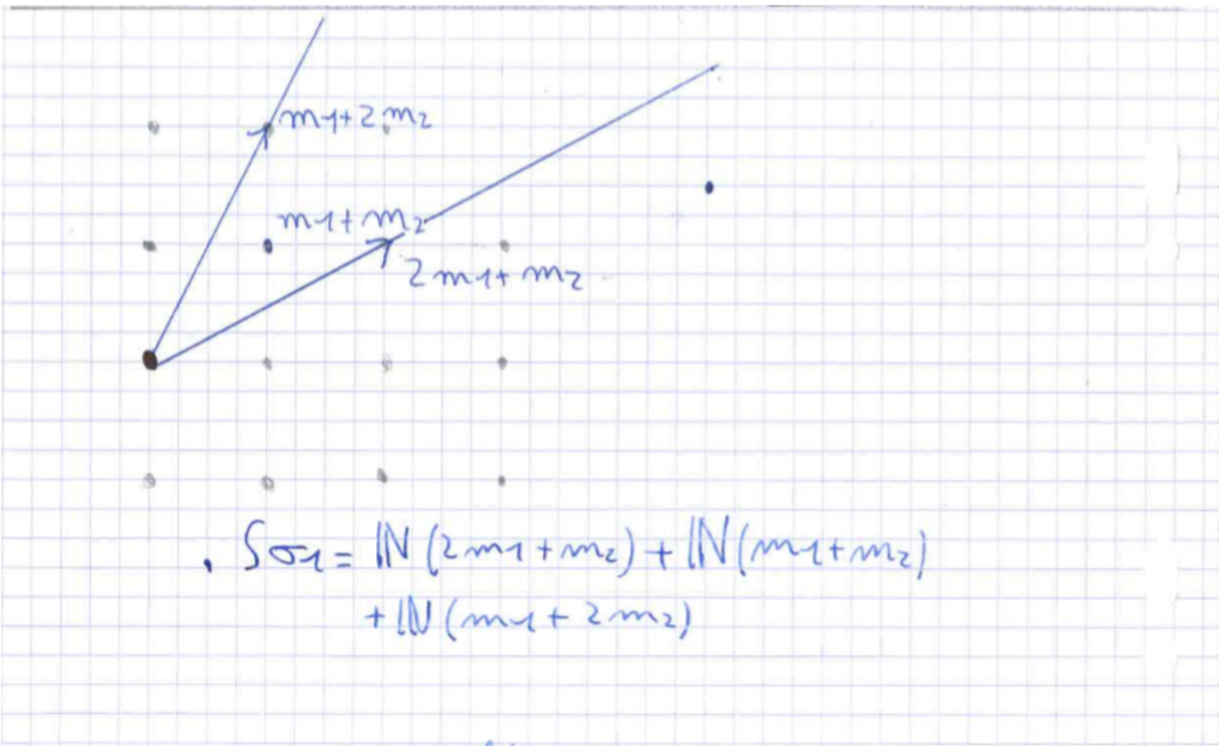


figure 4

On a : $S_{\sigma_1} = S_\lambda \cap S_\eta = \mathbb{N}(2m_1 + m_2) + \mathbb{N}(m_1 + m_2) + \mathbb{N}(m_1 + 2m_2)$.

Ainsi : $\mathbb{C}[S_{\sigma_1}] = \mathbb{C}[X^2Y, XY, XY^2]$.

D'où :

$$\mathbb{C}[S_{\sigma_1}] = \mathbb{C}[U,V,W]/(V^3 - UW).$$

Ainsi :

$$U_{\sigma_1} = \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 | z_2^3 = z_1 z_3\}.$$

Un exemple d'éventail

Voir figure page suivante

On a alors de la même manière que précedement :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{C}[S_{\sigma_1}] &=& \mathbb{C}[X^2Y, XY, XY^2] = \mathbb{C}[U,V,W]/(V^3 - UW) \\ U_{\sigma_1} &=& \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 | z_2^3 = z_1 z_3\} \end{array}$$

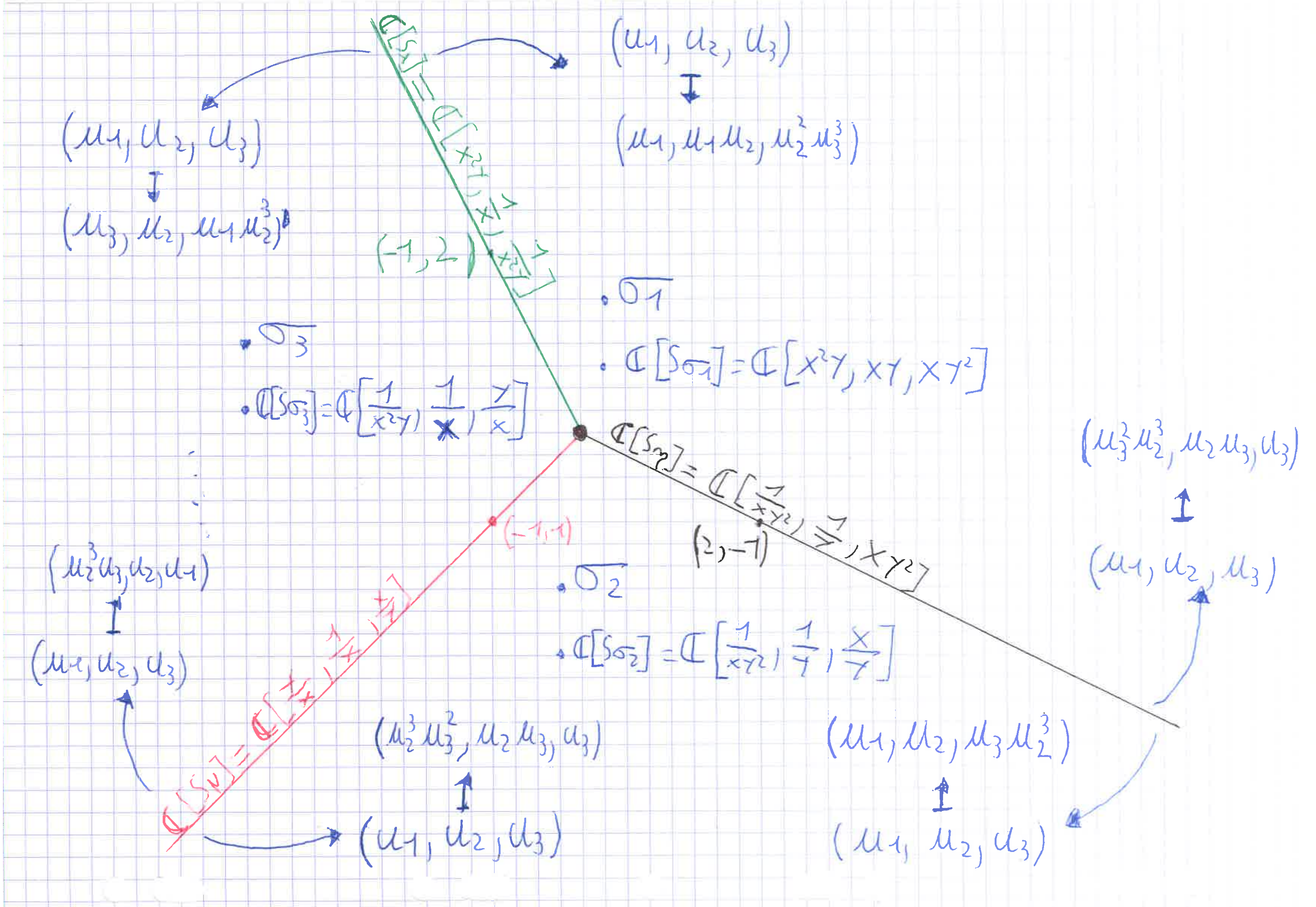
$$\begin{array}{rcl} \mathbb{C}[S_{\sigma_2}] &=& \mathbb{C}[\frac{1}{XY^2}, \frac{1}{Y}, \frac{X}{Y}] = \mathbb{C}[U,V,W]/(V^3 - UW) \\ U_{\sigma_2} &=& \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 | z_2^3 = z_1 z_3\} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{C}[S_{\sigma_3}] &=& \mathbb{C}[\frac{1}{X^2Y}, \frac{1}{X}, \frac{Y}{X}] = \mathbb{C}[U,V,W]/(V^3 - UW) \\ U_{\sigma_3} &=& \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 | z_2^3 = z_1 z_3\} \end{array}$$

Nous allons maintenant recoller les U_{σ_i} entre eux le long de λ, η, et μ via les applications explicitées en annexes. Nous avons donc un exemple de construction d'un éventail et d'une variété torique dans le plan affine.

Conclusion

Ce stage m'a donc permit de travailler sur des rudiments de géométrie algébrique via l'étude de ces variétés algébriques particulières que sont les variétés toriques. Le fait d'étudier l'intégralité de leur construction permet de comprendre la nécessité et l'utilité du fait de voir les points de $\mathbb{C}^n$ comme des idéaux de $\mathbb{C}[X_1, ..., X_n]$ et inversement suivant les besoins du travail. Nous avons donc réussi à aboutir à la définition d'une variété torique ainsi qu'à une caractérisation de sa compacité et de on caractère lisse. Le dernier exemple fût finalement la première chose que j'ai fait durant ce stage. L'avantage des variétés toriques comme il a déjà été dit plus haut est de donner lieu à des exemples très simples et très visuels. Ainsi avant même de regarder l'aspect abstrait et théorique de l'objet, on peut déjà le manipuler et le construire en petites dimension. Cela permet de mieux apprécier les choses dès qu'on passe en dimension quelconque et qu'on manipule une structure pouvant s'avérer compliquée en première approche lorsque l'on est totalement étranger avec la géométrie algébrique.


$\mathbb{C}[S_\lambda] = \mathbb{C}[x^2y, \ldots]$
$(u_1, u_2, u_3) \mapsto (u_1, u_1u_2, u_2^2u_3^3)$
$(u_1, u_2, u_3) \mapsto (u_3, u_2, u_1u_2^3)$
$(-1,2)$
σ_1
$\mathbb{C}[S_{\sigma_1}] = \mathbb{C}[x^2y, xy, xy^2]$
σ_3
$\mathbb{C}[S_{\sigma_3}] = \mathbb{C}[\frac{1}{x^2y}, \frac{1}{x}, \frac{y}{x}]$
$\mathbb{C}[S_\tau] = \mathbb{C}[\frac{1}{xy^2}, \frac{1}{y}, xy^2]$
$(2,-1)$
$(u_3^3u_2^3, u_2u_3, u_3) \mapsfrom (u_1, u_2, u_3)$
$(-1,1)$
σ_2
$\mathbb{C}[S_{\sigma_2}] = \mathbb{C}[\frac{1}{xy^2}, \frac{1}{y}, \frac{x}{y}]$
$(u_2^3u_3, u_2, u_1) \mapsfrom (u_1, u_2, u_3)$
$\mathbb{C}[S_\nu]$
$(u_2^3u_3^2, u_2u_3, u_3) \mapsfrom (u_1, u_2, u_3)$
$(u_1, u_2, u_3u_2^3) \mapsfrom (u_1, u_2, u_3)$

Annexes

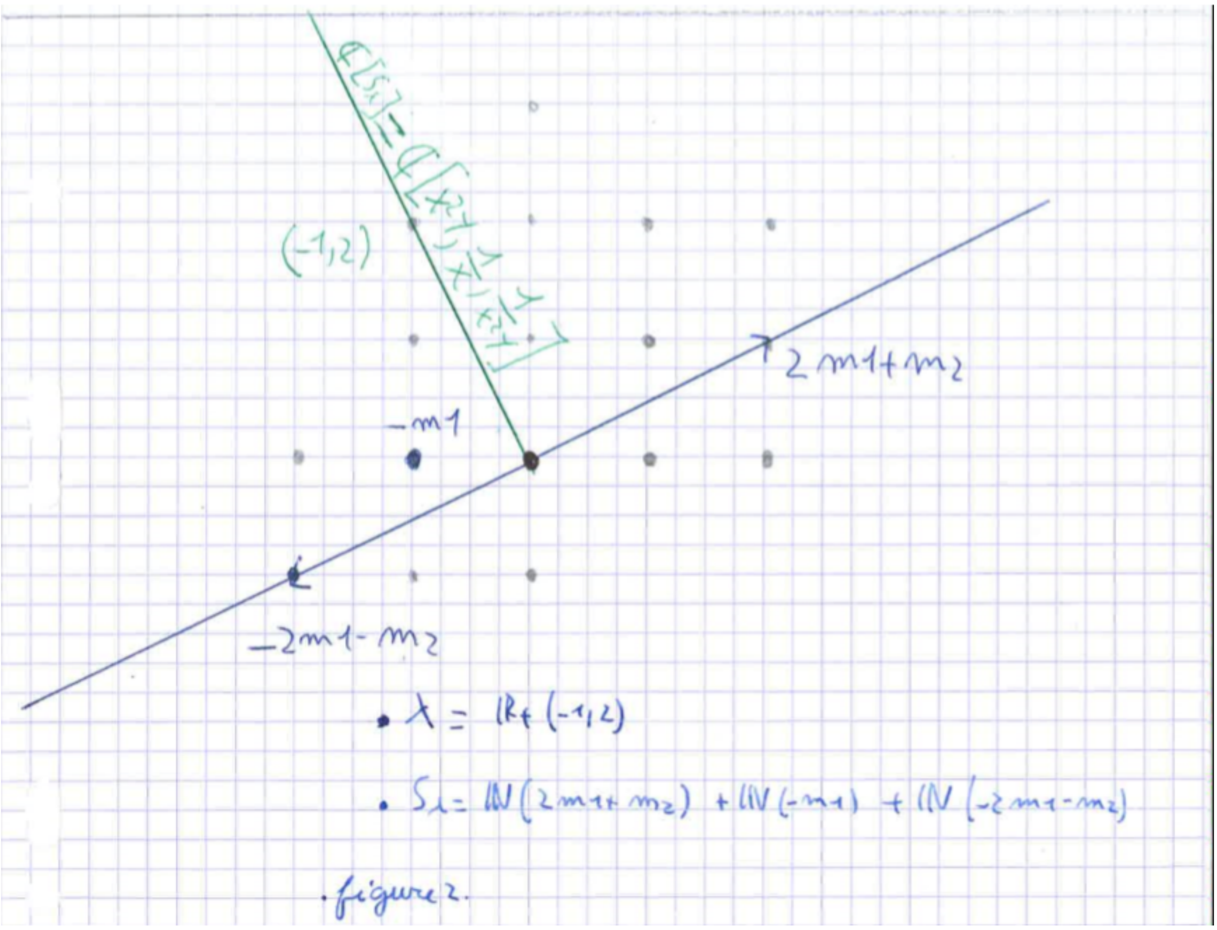
Lemme 4.1. *Pour tout n dans* $\mathbb{N}$, $A = \mathbb{C}[X, X_1, \frac{1}{X_1}, ..., X_n, \frac{1}{X_n}]$ *est intégralement clos.*

Démonstration. $\mathbb{C}[X, X_1, ..., X_n]$ est factoriel et $A = S^{-1}\mathbb{C}[X, X_1, ..., X_n]$ où $S = \{X_1^i, ..., X_n^i\}_{i\in\mathbb{N}}$ qui est une partie multiplicative, donc A est factoriel donc intégralement clos par le théorème 1.1.

□

Lemme 4.2. *Soit* σ *un cône sur V, espace vectoriel de dimension r. Soit* $(v_1, ..., v_p)$ *un système de générateurs de* σ*. Alors pour tout i,* $\mathbb{C}[S_{v_i}]$ *est isomorphe à* $\mathbb{C}[X, X_1, \frac{1}{X_1}, ..., X_{r-1}, \frac{1}{X_{r-1}}]$.

Démonstration. On se contentera ici de faire la démonstration en dimension 2, cela sera plus visuel que dans le cas général. Soit $\sigma = \mathbb{R}_+ v_1 + \mathbb{R}_+ v_2$. Le caractère fortement convexe de σ impose $v_2 \neq v_1$. Les formes linéaires positives et entières sur v_i sont donc celles dirigées par $v_i^\perp$ et $-v_i^\perp$ puis par une certaine forme v' comme sur la figure ci-dessous afin d'obtenir toutes les formes entières :



On a donc $\mathbb{C}[S_{v_i}] = \mathbb{C}[v_i^\perp, -v_i^\perp, v'] \simeq \mathbb{C}[X, X_1, \frac{1}{X_1}]$. D'où le lemme. □

On introduit ici des notions d'extansions de corps qui sont nécessaires pour le théorème 4.1. On ne les introduira pas pas dans le rapport car elles ne s'insère pas dans l'étude menée au long du stage.

Définition 4.1. *Soit $K \subset L$ une extansion de corps. Une partie B de L est dite algébriquement libre sur K si pour toute partie finie $\{x_1, \ldots, x_n\}$ de B et tout polynôme P de $K[X_1, \ldots, X_n]$, on a que $P(x_1, \ldots, x_n) = 0$ implique que P est nul.*

Définition 4.2. *Soit $K \subset L$ une extansion de corps. Une partie B de L est dite algébriquement génératrice sur K si L est algébrique sur le sous-corps $K(B)$.*

Définition 4.3. *Soit $K \subset L$ une extansion de corps. Une partie B de L est appelé base de transcendance de sur K si elle est à la fois algébriquement libre et algébiquement génératrice.*

Lemme 4.3. *Soit $K \subset L$ une extansion de corps. Il existe des bases de transcendance B de L sur K, elles ont toutes le même cardinal et ce cardinal est appelé degré de transcendance de L sur K.*

Théorème 4.1. *Soit A une $\mathbb{C}$-algèbre de type fini intègre et K_A son corps des fractions. Alors la dimension de Krüll de A est égal au degré de transcendance de K_A sur $\mathbb{C}$.*

Démonstration. On admettra ici ce théorème, la démonstration se trouve dans le livre de Daniel Perrin cité dans la bibliographie. □

Corollaire 4.1. $\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$ *est de dimension n.*

Bibliographie

http ://www-math.sp2mi.univ-poitiers.fr/ bosio/docs/coursvarietestoriques.pdf

Daniel Perrin, Géometrie algébrique Une introduction, InterÉditions/CNRS Éditions