ALBI
L3, semestre 1 (2025-2026) - Groupe magistère
Université de Rennes - ENS Rennes

TD 2 : Réduction des endomorphismes.

Exercice 1

On dit que $p \in \mathcal{L}(E)$ est un projecteur si $p^2 = p$.

1. Montrer que si p est un projecteur, alors $\ker(p - id) = \mathrm{im}(p)$.

2. En déduire que si p est un projecteur, alors $E = \ker p \oplus \mathrm{im}(p)$. Étudier la réciproque.

Exercice 2

Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie.

1. Soit $u \in GL(E)$. Montrer que $u^{-1} \in K[u]$.

2. Plus généralement, si $P \in K[X]$, montrer que $P(u) \in GL(E)$ si et seulement si P et π_u sont premiers entre eux dans $K[X]$, et que dans ce cas $P(u)^{-1} \in K[u]$.

3. Est-ce que les résultats précédents restent valables en dimension infinie ?

Exercice 3

Montrer que toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(K)$ est semblable à une matrice diagonale par blocs dont les blocs diagonaux ont pour polynôme caractéristique une puissance d'un polynôme irréductible.

Exercice 4

Soit $u, v \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que u et v commutent et sont diagonalisables. Montrer qu'il existe une base commune de diagonalisation pour u et v.

Exercice 5

On rappelle qu'un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est dit *trigonalisable* s'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure.

1. Montrer que si u est trigonalisable, alors son polynôme caractéristique est scindé.

2. Montrer que si le polynôme caractéristique de u est scindé, alors u est trigonalisable (on pourra raisonner par récurrence, et éventuellement considérer l'endomorphisme induit par u sur un quotient judicieusement choisi de E).

Exercice 6

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent. Montrer que $\mathrm{id} - u$ est inversible.

Exercice 7

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent.

1. Montrer que pour tout $k \geq 1$, $\mathrm{Tr}(u^k) = 0$.

2. On suppose que K est de caractéristique nulle. Montrer que la réciproque est vraie.

Indication : On pourra considérer la matrice M de u dans une base quelconque de E, et les valeurs propres λ_i de M dans une clôture algébrique de K ainsi que leurs multiplicités m_i, et

voir que l'hypothèse montre que les m_i sont solutions d'un système linéaire judicieusement choisi.
3. Donner un contre-exemple en caractéristique positive. Quelle information sur les valeurs propres de u la démonstration précédente fournit-elle dans ce cas ?

Exercice 8

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.On suppose que u est nilpotent d'indice s
1. Justifier que $rg(u^{s-1})$ est égal au nombre de blocs de Jordan de u de taille s.
2. Soit $(y_1, \ldots, y_r)$ une base de $\mathrm{im}(u^{s-1})$. Pour $1 \le j \le r$, on fixe $x_j \in E$ tel que $u^{s-1}(x_j) = y_j$. Justifier le fait que la famille $\mathcal{F}_{s-1} = \{u^i(x_j),\ 1 \le j \le r,\ 0 \le i \le s-1\}$ est libre.
3. Soit $F = \mathrm{Vect}(\mathcal{F}_{s-1})$, soit G un supplémentaire de $u^{s-2}(F)$ dans $\mathrm{im}(u^{s-2})$. On fixe $z_1, \ldots, z_k \in E$ tels que $(u^{s-2}(z_1), \ldots, u^{s-2}(z_k))$ soit une base de G. Soit $\mathcal{F}_{s-2} = \{u^i(z_j)\ 1 \le j \le k,\ 0 \le i \le s-2\}$. Montrer que $\mathcal{F}_{s-1} \cup \mathcal{F}_{s-2}$ est libre.
4. En déduire par récurrence une construction d'une base dans laquelle la matrice de u est sous forme de Jordan.
Indication : Est-ce que n'importe quel choix de supplémentaire G dans la question précédente convient vraiment à nos besoins ?
5. Appliquer l'algorithme de la question précédente à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 2 & -1 & 7 \\ 2 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

6. On ne suppose plus que u est nilpotent, mais on suppose χ_u scindé. Expliquer comment construire une base de Jordan pour u.

Exercice 9

Calculer la décomposition de Dunford-Jordan-Chevalley des matrices suivantes :
1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Exercice 10

On considère une suite récurrente linéaire d'ordre n : $x_0, \ldots, x_{n-1} \in K$, et pour tout $k \ge 0$,

$$x_{k+n} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x_{k+i}.$$

1. Montrer que les suites obéissant à cette relation de récurrence forment un K-espace vectoriel.

2. Pour $k \geq 0$, on considère le vecteur colonne X_k de coordonnées $(x_k, \ldots, x_{k+n-1})$. Exprimer X_{k+1} en fonction de X_k.
3. On considère la matrice compagnon C_P du polynôme $P(T) = T^n - \sum_{i=0}^{n-1} a_i T^i$. Exprimer X_k en fonction de M et X_0.
4. Dans le cas où C est diagonalisable, donner une base de l'espace des suites vérifiant cette relation de récurrence.
5. On suppose seulement que P est scindé, et on note $\lambda_1, \ldots \lambda_r$ les racines de P, et $m_1, \ldots, m_r$ leurs multiplicités respectives. Montrer qu'une base de l'espace des suites vérifiant cette relation de récurrence est $\{(k^p \lambda_i^k)_{k\in\mathbb{N}},\ 1 \leq i \leq r, 0 \leq p \leq m_r - 1\}$ (on pourra considérer la décomposition de Jordan de C, et montrer qu'il y a un seul bloc de Jordan pour chaque valeur propre).

Exercice 11

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Pour $x \in E$, on note π_x le polynôme unitaire de degré minimal tel que $\pi_x(u)(x) = 0$.
1. Soit $x \in E$. Montrer que π_x est bien défini et divise le polynôme minimal de u.
2. Soit $x \in E$. Montrer que $\{P(u)(x) \mid P \in K[X]\}$ est un sous-K-espace vectoriel de E de dimension $\deg \pi_x$.
3. Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $\pi_x = \pi_u$ (on pourra commencer par traiter le cas où π_u est une puissance d'un polynôme irréductible).

Exercice 12

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ cyclique, et soit $x \in E$ un vecteur cyclique pour u. Soit $F \subset E$ un sous-espace stable par u.
1. Montrer que $\{P \in K[X] \mid P(u)(x) \in F\}$ est un idéal de $K[X]$.
2. En déduire que l'endomorphisme induit par u sur F est cyclique.
3. Soit P le polynôme caractéristique de u et $Q|P$ unitaire non constant. Montrer qu'il existe un sous-espace stable par u sur lequel l'endomorphisme induit est cyclique de polynôme caractéristique Q.
4. Montrer que tout sous-espace F de E stable par u est de la forme $F = \ker Q(u)$ pour un certain diviseur Q de π_u.
5. Montrer qu'un endomorphisme cyclique a un nombre fini de sous-espaces stables.

Exercice 13

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que χ_u est scindé.
1. Montrer que u est cyclique si et seulement si, pour toute valeur propre λ de u, u a un unique bloc de Jordan associé à la valeur propre λ.
On note les invariants de similitude de u $P_1|\cdots|P_r$ avec

$$P_1 = (X-\lambda_1)^{m_{1,1}} \cdots (X-\lambda_k)^{m_{k,1}}, \cdots, P_r = (X-\lambda_1)^{m_{1,r}} \cdots (X-\lambda_k)^{m_{k,r}}.$$

2. Décrire la décomposition de Jordan en fonction des λ_i et des $m_{i,j}$.

Exercice 14

Soit P_1, P_2, P_3 des polynômes irréductibles unitaires de $\mathbb{R}[X]$ deux à deux distincts.

1. Déterminer le nombre de classes de similitude de matrices ayant $P_1P_2^2P_3$ pour polynôme minimal et $P_1^2P_2^4P_3^3$ pour polynôme caractéristique. Pour chacune d'entre elles donner les invariants de similitude.
2. On suppose $P_1 = X-1$, $P_2 = X-2$ et $P_3 = X-3$. Donner pour chacune des classes de similitude obtenue à la question précédente un représentant sous forme réduite de Jordan.

Exercice 15

Soit E de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$ cyclique. Soit $x \in E$ cyclique pour u, et soit $\varphi \in E^*$ tel que $\varphi(u^i(x)) = \delta_{i,n-1}$.
1. Montrer que φ est cyclique pour ${}^tu$ et déterminer $\pi_{{}^tu}$.
2. En déduire qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de u est la transposée d'une matrice compagnon.
On fixe une telle base $\mathcal{B}$.
3. Soit λ une valeur propre de u, exhiber un vecteur propre de u associé à λ, écrit dans la base $\mathcal{B}$.
4. En déduire que si $M_1, \dots, M_k$ sont des matrices compagnons de taille n qui ont en commun une valeur propre λ, alors λ^k est valeur propre de $M_1 \cdots M_k$.

Exercice 16

Soit $M \in \mathcal{M}_n(K)$, montrer que M et ${}^tM$ sont semblables.

Exercice 17

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, on appelle *commutant* de u l'ensemble des $v \in \mathcal{L}(E)$ tels que $u \circ v = v \circ u$. On le note $\mathcal{C}(u)$.
1. Montrer que $\mathcal{C}(u)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$ qui contient $K[u]$.
2. Montrer que si $u \in \mathcal{L}(E)$ est cyclique, alors $\mathcal{C}(u) = K[u]$.

Exercice 18

Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et $v \in \mathcal{L}(E')$. On considère $\mathcal{C}_{u,v} = \{w \ : \ E \to E' \mid w \circ u = v \circ w\}$.
1. Soit $P \in K[X]$. Montrer que $\mathcal{C}_{u,v} \subset \mathcal{C}_{P(u),P(v)}$.
On note $P_1, \dots, P_r$ (resp. $Q_1, \dots, Q_s$) les facteurs invariants de u (resp. v). On fixe des bases respectives de E, E' dans lesquelles les matrices respectives de u, v sont sous forme de Frobenius ; on note $x_i \in E$ le vecteur de base ainsi obtenu, tel que $\pi_{u,x_i} = P_i$.
2. Soit $w \in \mathcal{C}_{u,v}$, et $y_i = w(x_i)$. Montrer que $P_i(v)(y_i) = 0$.
3. En déduire qu'on peut définir une application linéaire par

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}_{u,v} & \to & \ker P_1(v) \times \cdots \times \ker P_r(v) \\ w & \mapsto & (w(x_1), \dots, w(x_r)) \end{array}$$

et montrer que cette application est un isomorphisme.
4. Montrer que si $Q \in K[X]$, alors $\dim \ker Q(v) = \sum_{i=1}^{s} \deg \operatorname{pgcd}(Q, Q_i)$ (on pourra commencer par traiter le cas où v est cyclique).
5. En déduire que $\dim \mathcal{C}_{u,v} = \sum_{1 \leq i \leq r} \sum_{1 \leq j \leq s} \deg \operatorname{pgcd}(P_i, Q_j)$.
6. Expliciter la formule dans le cas où $E = E'$ et $u = v$.