

*TD 3 : Espaces quadratiques*

**Exercice 1**

Soit  $E$  un  $K$ -espace vectoriel de dimension finie  $n$ . On fixe une base  $(e_1, \dots, e_n)$  de  $E$ .

1. Soit  $q$  une forme quadratique sur  $E$  et  $M = (m_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$  la matrice de  $q$  dans la base précédente. Montrer que

$$q\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n m_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} m_{ij} x_i x_j.$$

2. Réciproquement, on se donne une application  $Q : K^n \rightarrow K$  définie par

$$Q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n a_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij} x_i x_j.$$

Montrer que l'application  $\sum_{i=1}^n x_i e_i \mapsto Q(x_1, \dots, x_n)$  définit une forme quadratique sur  $E$  dont la matrice dans la base canonique est la matrice  $A$  ayant pour coefficients les  $a_{i,j}$  au dessus (au sens large) de la diagonale, et complétée ensuite sous la diagonale de manière à en faire une matrice symétrique.

**Exercice 2**

On considère l'application définie sur l'espace  $E = \mathbb{R}[X]_{<3}$  des polynômes à coefficients réels de degré au plus 2 par la formule :

$$q(P) = \int_0^1 P'(t)P(1-t)dt + P(0)P(1).$$

1. Montrer que  $q$  est une forme quadratique et expliciter sa forme polaire.
2. Déterminer la matrice de  $q$  dans la base  $(1, X, X^2)$  de  $E$ .
3. Calculer le discriminant de  $q$ . Est-elle dégénérée ?
4. La forme  $q$  possède-t-elle des vecteurs isotropes non nuls ?

**Exercice 3**

On dit qu'une forme quadratique  $q$  sur  $E$  représente l'élément  $\alpha \in K^\times$  s'il existe  $x \in E$  tel que  $q(x) = \alpha$ .

1. Montrer que deux formes quadratiques isométriques représentent exactement le même ensemble de scalaires.

2. Montrer que si  $q$  représente  $\alpha \in K^\times$ , alors il existe  $\alpha_2, \dots, \alpha_n \in K$  tels que  $q$  soit isométrique à :

$$\alpha x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \dots + \alpha_n x_n^2.$$

**Exercice 4**

Soit  $(\varepsilon_i)_{i \in I}$  une famille de représentants de  $K^\times / (K^\times)^2$ . Montrer que toute forme quadratique non dégénérée est équivalente à une forme quadratique de la forme :

$$\varepsilon_{i_1} x_1^2 + \varepsilon_{i_2} x_2^2 + \cdots + \varepsilon_{i_n} x_n^2.$$

**Exercice 5**

Soit  $(E, q)$  un espace quadratique et  $F \subset E$  un sous-espace vectoriel.

1. Montrer que  $F \cap F^\perp = N(q|_F)$ .
2. En déduire que si  $q$  est non dégénérée et si  $F \subset E$  est un sous-espace totalement isotrope de  $E$  (*i.e.* contenu dans son cône isotrope), alors  $2 \dim F \leq \dim E$ .
3. Donner un exemple où il y a égalité dans l'inégalité précédente.
4. Dans le cas de la forme quadratique  $q: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$  définie par  $q(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ , dessinez le cône isotrope et les sous-espaces totalement isotropes de dimension maximale.

**Exercice 6**

On dit qu'un espace quadratique  $(E, q)$  de forme polaire  $f$  est un *plan hyperbolique* s'il admet une base  $\{e_1, e_2\}$  formée de vecteurs isotropes, tels que  $f(e_1, e_2) \neq 0$ .

1. Soit  $(E, q)$  un plan hyperbolique. Montrer qu'il existe une base de  $E$  dans laquelle la matrice de  $q$  est  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ . La forme  $q$  est-elle dégénérée ?
2. Soit  $(E, q)$  un espace quadratique non dégénéré possédant un vecteur isotrope non nul  $x$ . Montrer que  $E$  contient un sous-espace  $F$  contenant  $x$  qui est un plan hyperbolique.
3. Démontrer par récurrence que  $E$  est somme directe orthogonale de (sous-espaces isométriques à des) plans hyperboliques et d'un sous-espace ne contenant pas de vecteurs isotropes.

**Exercice 7**

1. Montrer que le groupe  $\mathbb{Q}^\times / (\mathbb{Q}^\times)^2$  est infini.
2. En déduire qu'il y a une infinité de classes de formes quadratiques sur un  $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel non nul.

**Exercice 8**

Montrer qu'une forme quadratique est de rang  $r$  si et seulement si elle s'écrit comme combinaison linéaire de  $r$  carrés de formes linéaires indépendantes.

**Exercice 9**

Ecrire les matrices des formes quadratiques réelles suivantes dans la base canonique. Déterminer leur rang et leur signature.

1.  $q(x, y, z) = 4xy - 4yz - y^2 - z^2$ .
2.  $q(a, b, c) = b^2 - 4ac$
3.  $q(x, y, z) = y^2 - 3z^2 + 2xy + 2yz - 2xz$ .

**Exercice 10**

Soit  $q$  une forme quadratique réelle non dégénérée de signature  $(p, n - p)$ .

1. Montrer que l'ensemble des solutions de l'équation  $q(x) = 1$  est homéomorphe à  $\mathbb{S}^{p-1} \times \mathbb{R}^{n-p}$ .
2. Montrer que  $SL_2(\mathbb{R})$  est homéomorphe à  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^2$ .

**Exercice 11**

Soient  $(E, q), (E', q')$  des espaces quadratiques réels de dimension finie, de formes polaires respectives  $f, f'$ .

1. Montrer que l'on peut définir une structure d'espace quadratique sur  $E \otimes E'$  en posant  $g(x \otimes x', y \otimes y') = f(x, y)f'(x', y')$ .
2. Déterminer le rang et la signature de  $E \otimes E'$  en fonction de ceux de  $E$  et  $E'$ .

**Exercice 12**

Soit  $K$  un corps fini de cardinal  $q$  impair.

1. En considérant l'endomorphisme de groupe  $x \mapsto x^2$  défini sur  $K^\times$ , démontrer que  $(K^\times)/(K^\times)^2$  est d'ordre 2.
2. Combien y a-t-il de carrés dans  $K$  ?
3. En déduire que pour  $a, b, c \in K$  tous non nuls, l'équation  $ax^2 + by^2 = c$  possède au moins une solution non nulle dans  $K^2$ .
4. En utilisant l'exercice 3, en déduire que toute forme quadratique non dégénérée sur  $K^2$  est isométrique à  $x^2 + \beta y^2$  pour un certain  $\beta \in K^\times$ .
5. Soit  $\alpha \in K^\times$  non carré, et soit  $(E, q)$  un espace quadratique de dimension  $n$ , non dégénéré sur  $K$ . Montrer que  $q$  est isométrique à  $x_1^2 + \dots + x_n^2$  ou à  $x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 + \alpha x_n^2$ .
6. Dans les deux cas précédents, donner la valeur du discriminant de  $q$ . En déduire que deux formes quadratiques non dégénérées sur  $E$  sont isométriques si et seulement si elles ont même discriminant.

**Exercice 13**

Soit  $(E, q)$  un espace quadratique non dégénéré sur  $\mathbb{Q}$ .

1. On suppose que  $q$  représente  $\alpha$ . Montrer que la famille  $q^{-1}(\{\alpha\})$  engendre  $E$ .
2. Montrer que  $q^{-1}(\{\alpha\})$  est vide ou infini.
3. Montrer que

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{Q}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

est infini.