

TD 4 : Espaces hermitiens et euclidiens

Exercice 1

Soit E un espace hermitien et $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que pour tout $x \in E$, $\langle f(x), x \rangle = 0$.

1. Montrer que pour tout $(x, y) \in E^2$, $\langle f(x), y \rangle = 0$, et en déduire que $f = 0$.
2. Peut-on conclure la même chose si E est un espace euclidien ?

Exercice 2

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien et soit G un sous-groupe fini de $GL(E)$.

1. Montrer que l'application

$$(x, y) \mapsto \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \langle gx, gy \rangle$$

est un produit scalaire sur E .

2. Montrer que le produit scalaire précédent, noté $\langle \cdot, \cdot \rangle_G$, est invariant par tous les éléments de G (c'est-à-dire que pour tous $x, y \in E$ et pour tout $g \in G$, on a $\langle x, y \rangle_G = \langle gx, gy \rangle_G$).

3. En déduire que G est conjugué à un sous-groupe de $O(E)$ (c'est-à-dire qu'il existe un sous-groupe H de $O(E)$ et un élément $u \in GL(E)$ tel que $uGu^{-1} = H$).

Remarque. On peut montrer (mais c'est plus difficile) que ce résultat reste vrai dans le cas où G est seulement supposé compact.

Exercice 3

Soit E un espace hermitien et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que u est trigonalisable en base orthonormée.

Exercice 4

Soit $(E, (\cdot | \cdot))$ un espace euclidien. On munit $E_{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \otimes_{\mathbf{R}} E$ de sa structure canonique de $\mathbf{C}$ -espace vectoriel.

1. Démontrer qu'il existe une unique application $\langle \cdot, \cdot \rangle : E_{\mathbf{C}} \times E_{\mathbf{C}} \rightarrow \mathbf{C}$, $\mathbf{R}$ -bilinéaire, telle que pour tous $\lambda, \mu \in \mathbf{C}$ et $x, y \in E$, $\langle \lambda \otimes x, \mu \otimes y \rangle = \lambda \bar{\mu} (x | y)$.
2. Démontrer que cette application est l'unique produit hermitien sur $E_{\mathbf{C}}$ tel que pour tout $(x, y) \in E^2$, $\langle 1 \otimes x, 1 \otimes y \rangle = (x | y)$.
3. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E . Démontrer que $(1 \otimes e_1, \dots, 1 \otimes e_n)$ est une base orthonormée de $E_{\mathbf{C}}$.
4. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, démontrer que $(\text{id} \otimes u)^* = \text{id} \otimes u^*$.

Exercice 5

Soit E un espace euclidien ou hermitien, et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que u est un endomorphisme normal si, et seulement si, pour tout $x \in E$, $\|u(x)\| = \|u^*(x)\|$.

Exercice 6

Soit E un espace hermitien. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ autoadjoint. On dit que u est positif (resp. défini positif) si la forme sesquilinéaire $(x, y) \mapsto \langle u(x), y \rangle$ est positive (resp. définie positive).

1. Démontrer que u est positif (resp. défini positif) si et seulement si ses valeurs propres sont toutes positives (resp. strictement positives).
2. On suppose u défini positif, démontrer qu'il existe un unique s défini positif tel que $s^2 = u$.
3. Que dire si u est seulement supposé positif?

Exercice 7

Soit E un espace hermitien, et $u \in GL(E)$. On veut démontrer qu'il existe un unique couple (s, v) tel que s soit autoadjoint défini positif, v unitaire, et $sv = u$.

1. Démontrer que si on a une telle décomposition, alors $s^2 = uu^*$.
2. Démontrer que uu^* est défini positif, et en déduire l'existence et l'unicité de s .
3. Conclure.

Exercice 8

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. On suppose que A et B sont unitairement semblables.

1. Montrer qu'il existe $P \in GL_n(\mathbf{R})$ telle que $A = PBP^{-1}$ et ${}^tA = P^tBP^{-1}$.
2. Soit $P = OS$ la décomposition polaire de P . Montrer que B commute avec S .
3. Montrer que A et B sont orthogonalement semblables.

Exercice 9

Soient E, F des espaces euclidiens (ou hermitiens) et soit $u : E \rightarrow F$ linéaire. On se donne $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ des bases orthonormées respectives de E et F .

1. Démontrer que $\text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(u^*) = \overline{\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(u)}^T$.
2. On suppose que $E = F$ est **euclidien** de dimension 2 et que u est normal et n'est pas diagonalisable. Démontrer que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ avec $(a, b) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^\times$.

Exercice 10

Soit E un espace euclidien, et soit $u \in \mathcal{L}(E)$ normal. On suppose que π_u est de degré 2 et sans racines réelles.

1. Démontrer que uu^* possède une valeur propre réelle, que l'on notera λ .
2. Soit $x \in E$ un vecteur propre associé à λ , démontrer que la famille $\{x, u(x)\}$ est libre. On note V le $\mathbf{R}$ -espace vectoriel de dimension 2 qu'elle engendre.
3. Démontrer que $V = \text{Vect}\{u(x), u^2(x)\}$, et en déduire que V est stable par u et par u^* .
4. Démontrer par récurrence sur $\dim E$ qu'il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de u est diagonale par blocs, les blocs diagonaux étant tous égaux à une même matrice de similitude.

Exercice 11

Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbf{R})$ et $B \in \mathcal{S}_n(\mathbf{R})$. Montrer qu'il existe $P \in GL_n(\mathbf{R})$ telle que ${}^tPAP = I_n$ et tPBP soit une matrice diagonale réelle.

Exercice 12

Soit E un espace euclidien.

1. Justifier l'identité du parallélogramme :

$$\forall x, y \in E, \frac{1}{2} (\|x\|^2 + \|y\|^2) = \left\| \frac{x+y}{2} \right\|^2 + \left\| \frac{x-y}{2} \right\|^2.$$

Soit $x \in E$ et $r > 0$, on note $B(x, r)$ la boule de centre x et de rayon r .

2. Justifier que pour tous $y, z \in B(x, r)$, on a $\|y - z\|^2 \leq 4r^2 - 4 \left\| x - \frac{y+z}{2} \right\|^2$.
Soit $C \subset E$ une partie convexe et fermée et $\delta = \inf_{y \in C} \|y - x\|$. Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on note $B_n = B(x, \delta + 1/n)$.
3. Montrer que si $y, z \in B_n \cap C$, on a $\|y - z\|^2 = \mathcal{O}(1/n)$.
4. En déduire qu'il existe un unique $y \in C$ tel que $\|x - y\| = \delta$.
5. Soit $z \in C$. En considérant l'élément $z' = ty + (1-t)z \in C$, montrer que

$$\langle x - y, z - y \rangle \leq 0.$$

Exercice 13

Soit E un espace euclidien. On munit $\mathcal{L}(E)$ de la norme subordonnée à la norme euclidienne. On rappelle que l'enveloppe convexe d'une partie X de E est l'intersection de tous les convexes de E contenant X .

1. Montrer que pour tout $u \in O(E)$, $\|u\| = 1$.
2. En déduire que l'enveloppe convexe de $O(E)$ est contenue dans la boule unité de $\mathcal{L}(E)$. On munit $\mathcal{L}(E)$ du produit scalaire $(u|v) = \text{Tr}(u^*v)$. Notons C l'enveloppe convexe de $O(E)$.
3. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, on suppose qu'il existe $\varphi \in \mathcal{L}(E)^*$ tel que pour tout $o \in P(E)$, $\varphi(u) > \varphi(o)$. Exhiber un convexe contenant $O(E)$ mais pas u .
4. Réciproquement, on suppose que $u \notin C$, montrer qu'il existe $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ tel que pour tout $o \in O(E)$, $\varphi(u) > \varphi(o)$.

Indication. On pourra utiliser la projection sur un convexe fermé.

Le but de la fin de l'exercice est de montrer que C est la boule unité de $\mathcal{L}(E)$ (pour la norme subordonnée à la norme euclidienne).

5. Justifier le fait qu'il suffit de montrer que

$$\forall u \in \mathcal{L}(E), \|u\| \leq 1 \Rightarrow \forall v \in \mathcal{L}(E), \text{Tr}(vu) \leq \sup_{o \in O(E)} \text{Tr}(vo)$$

On fixe $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\|u\| \leq 1$.

Soit $v \in \mathcal{L}(E)$ dont on écrit une décomposition polaire $v = s\omega$. On fixe une base orthonormée $(e_1, \dots, e_n)$ de E formée de vecteurs propres de s .

6. Montrer que pour $o \in O(E)$, on a $\text{Tr}(vo) \geq \sum_{i=1}^n \|s(e_i)\|$.
7. Montrer que $\text{Tr}(vu) = \sum_{i=1}^n \langle v(e_i), u^*(e_i) \rangle$.
8. En déduire que $\text{Tr}(vu) \leq \sum_{i=1}^n \|v(e_i)\|$ et conclure.

Exercice 14

Soit $E = \mathbf{R}[X]$, et pour $n \geq 0$, $E_n = \mathbf{R}_n[X]$. On définit sur $E \times E$ l'application :

$$(P, Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)dt.$$

On fixe un entier $n \geq 0$.

1. Montrer que la restriction à $E_n \times E_n$ de l'application précédente fait de E_n un espace euclidien.
2. Pour tout $0 \leq i \leq n$, on note P_i le polynôme obtenu en appliquant le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à la base $(1, X, \dots, X^n)$ de E_n . Montrer que P_n a n racines réelles distinctes dans l'intervalle $]0, 1[$.
3. On note $x_1, \dots, x_n$ les racines de P_n . Montrer qu'il existe une unique famille de nombres réels $(\omega_1, \dots, \omega_n)$ tels que pour tout $P \in E_{n-1}$, $\int_0^1 P(t)dt = \sum_{i=1}^n \omega_i P(x_i)$.
4. En utilisant la division euclidienne par P_n , montrer que la formule précédente reste valable pour $P \in E_{2n-1}$. Montrer que la formule n'est pas valable pour $P \in E_{2n}$.
5. Montrer que s'il existe $x'_1, \dots, x'_n \in \mathbf{R}$ et $\omega'_1, \dots, \omega'_n$ tels que pour tout $P \in E_{2n-1}$ on ait $\int_0^1 P(t)dt = \sum_{i=1}^n \omega'_i P(x'_i)$, alors nécessairement les x'_i sont les x_i et les ω'_i sont les ω_i .