

TD 4 : Différentielle

Exercice 1. Application directe de la définition

Soit $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$. On suppose qu'il existe une constante $M > 0$ telle que :

$$\forall x \in \mathbf{R}^n, \|f(x)\| \leq M\|x\|^2.$$

f est-elle différentiable en 0 ?

Exercice 2. Défauts de la dérivée directionnelle

1. On considère $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ donnée par

$$(x, y) \mapsto f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^2}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ y & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que f admet une dérivée suivant tous les vecteurs en $(0, 0)$, mais que f n'est pas continue en $(0, 0)$.

2. On considère $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ donnée par

$$(x, y) \mapsto f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^4 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que f est dérivable en $(0, 0)$ suivant tous les vecteurs mais n'est pas différentiable en $(0, 0)$.

Exercice 3. Applications bilinéaires continues

Soit $(E_1, \|\cdot\|_{E_1})$, $(E_2, \|\cdot\|_{E_2})$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ des espaces vectoriels normés. On pose $E = E_1 \times E_2$ qu'on munit de la norme $\|\cdot\|_E$ définie par :

$$\forall x = (x_1, x_2) \in E, \|x\|_E = \max\{\|x_1\|_{E_1}, \|x_2\|_{E_2}\}.$$

Soit $f : E \rightarrow F$ une application bilinéaire continue. Montrer que f est de classe \mathcal{C}^1 et donner l'expression de sa différentielle. En déduire que si $(A, \|\cdot\|)$ est une algèbre normée, l'application $(x, y) \in A \times A \mapsto xy \in A$ est de classe \mathcal{C}^1 .

Remarque : plus généralement, on peut montrer que le résultat reste valable pour toute application n -linéaire continue (voir le poly de cours). La preuve du caractère \mathcal{C}^1 est difficile.

Exercice 4. Puissance sur une algèbre normée

Soit E une algèbre normée et soit $n \geq 1$. Montrer que l'application puissance : $g_n : x \in E \mapsto x^n \in E$, est de classe \mathcal{C}^1 (on pourra utiliser le résultat de la remarque suivant l'exercice 3) et que :

$$\forall x \in E, \forall h \in E, dg_n(x).h = \sum_{k=0}^{n-1} x^k h x^{n-1-k}.$$

Exercice 5. Transformation d'une suite ℓ^p

Soient $p \geq 1$ et $f \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ une fonction nulle en 0. On pose :

$$F : \begin{array}{ccc} \ell^p(\mathbf{N}, \mathbf{R}) & \rightarrow & \ell^p(\mathbf{N}, \mathbf{R}) \\ x = (x_n)_{n \geq 0} & \mapsto & F(x) = (f(x_n))_{n \geq 0} \end{array}.$$

1. Montrer que F est bien définie.
2. Montrer que F est différentiable et calculer sa différentielle.
3. F est-elle de classe \mathcal{C}^1 ?

Exercice 6. *Changements de variables*

Soit $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ une application différentiable.

1. Exprimer la dérivée de $x \in \mathbf{R} \mapsto g(x) = f(x, x) \in \mathbf{R}$ en fonction de la différentielle de f .
2. Exprimer la différentielle de $(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mapsto h(x, y) = f(y, x) \in \mathbf{R}$ en fonction de la différentielle de f .

Exercice 7. *Différentielle du déterminant*

Montrer que l'application déterminant est de classe \mathcal{C}^1 sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ et donner l'expression de sa différentielle.

Exercice 8. *La trace de la puissance*

Soit $k \geq 1$. Montrer que l'application :

$$M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \mapsto \text{Tr}(M^k) \in \mathbf{R},$$

est \mathcal{C}^1 et calculer sa différentielle.

Exercice 9. *Détecteur de vecteurs propres*

Soient E un \mathbf{R} -espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et u un endomorphisme symétrique (i.e. pour tout $(x, y) \in E^2 : \langle u(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle$) continu de E .

1. Montrer que l'application $x \in E \mapsto \langle u(x), x \rangle \in \mathbf{R}$ est différentiable sur E et calculer sa différentielle.
2. On considère l'application :

$$\begin{aligned} \varphi : E \setminus \{0\} &\rightarrow \mathbf{R} \\ x &\mapsto \frac{\langle u(x), x \rangle}{\|x\|^2}. \end{aligned}$$

Établir qu'il s'agit d'une application différentiable et calculer sa différentielle. Montrer que pour tout élément non nul a de E , $d\varphi(a) = 0$ si et seulement si a est un vecteur propre de u .

Exercice 10. *Un calcul de différentielle en dimension infinie*

On note $E = \{f \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbf{R}), f(0) = 0\}$ et $F = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbf{R})$, qu'on munit des normes :

$$\forall f \in E, \|f\|_E = \|f'\|_\infty \quad \text{et} \quad \forall g \in F, \|g\|_F = \|g\|_\infty.$$

On définit alors $T : E \rightarrow F$ par :

$$\forall f \in E, Tf = f' + f^2.$$

1. Montrer que $\|\cdot\|_E$ définit bien une norme sur E . L'espace vectoriel normé obtenu est-il complet ?
2. Montrer que T est \mathcal{C}^1 et donner l'expression de sa différentielle.

Exercice 11. *L'intégrale du déterminant*

On note $E = \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbf{R}^2)$ qu'on munit de la norme $\|\cdot\|_E$ définie par :

$$\forall f \in E, \|f\|_E = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty.$$

Montrer que l'application $T : E \rightarrow \mathbf{R}$ définie par

$$f \mapsto \int_0^1 \det(f(t), f'(t)) dt$$

est de classe \mathcal{C}^1 et calculer sa différentielle.

Exercice 12. Transformation d'une suite ℓ^∞

Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbf{R}, \mathbf{R})$. On pose :

$$F : \ell^\infty(\mathbf{N}, \mathbf{R}) \rightarrow \ell^\infty(\mathbf{N}, \mathbf{R}) \\ x = (x_n)_{n \geq 0} \mapsto F(x) = (f(x_n))_{n \geq 0} .$$

Montrer que F est deux fois différentiable et calculer sa différentielle seconde.

Exercice 13. Différentielle seconde du déterminant

Calculer la différentielle seconde de l'application $\det: \mathrm{GL}_n(\mathbf{R}) \rightarrow \mathbf{R}$.

Exercice 14. Une généralisation de l'égalité des accroissements finis

Soient E un espace vectoriel normé et Ω un ouvert convexe de E . Soit $f: \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ une application différentiable. Montrer que pour tous $x, y \in \Omega$, il existe $c \in [x, y]$ tel que :

$$f(y) = f(x) + df(c) \cdot (y - x).$$

Exercice 15. Un exemple de calcul de différentielle partielle

Pour $X = (x, y) \in \mathbf{R}^2$ et $U = (u, v, w) \in \mathbf{R}^3$, on note $f(X, U) := (xu^2 + y^2vw, uv(x + y))$. Calculer la différentielle partielle $\frac{\partial f}{\partial U}(X, U)$.

Exercice 16. Calcul concret de dérivées partielles

Étudier la continuité puis l'existence et la continuité des dérivées partielles premières de $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 y^2 \ln(x^2 + y^2) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Exercice 17. Continuité et différentiabilité en fonction d'un paramètre

Soit $\alpha > 0$. Étudier, en fonction de α , la continuité puis la différentiabilité à l'origine de l'application $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{|xy|^\alpha}{\sqrt{x^2 + 3y^2}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Exercice 18. Contre-exemple de Peano au théorème de Schwarz

Soit $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ la fonction définie par $f(0, 0) = 0$ et

$$f(x, y) = \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} \quad \text{si } (x, y) \neq (0, 0).$$

Montrer que les dérivées partielles $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$ existent mais ne sont pas égales.

Exercice 19. Différentiable ?

On considère $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x \sin(y^2)}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue.
2. f admet-elle des dérivées partielles en $(0, 0)$?

3. f est-elle différentiable en $(0,0)$?

Exercice 20. *Une limite*

Calculer la limite :

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{e^x - (1+x) \cos y}{(x^2 + y^2) \cos y}.$$

Indication : on pourra utiliser la fonction $f : \mathbf{R} \times]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbf{R}$ définie par : $f(x, y) = \frac{e^x}{\cos y}$.

Exercice 21. *Rang localement constant*

Soit $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^p$ une application \mathcal{C}^1 . Montrer qu'il existe un ouvert U dense dans \mathbf{R}^n tel que le rang de df soit localement constant sur U (i.e pour tout $x \in U$, il existe un ouvert contenant x sur lequel df est de rang constant).

Exercice 22. *Différentielle seconde de l'inversion*

On suppose que E est une algèbre de Banach. Montrer que l'inversion est deux fois différentiable sur l'ensemble des inversibles de E noté $\text{Inv}(E)$ (ouvert dans E) et donner sa différentielle seconde.

Exercice 23. *Lemme d'Hadamard*

Soit Ω un ouvert convexe de \mathbf{R}^n contenant 0 et soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathbf{R})$. On suppose que $f(0) = 0$ et $df(0) = 0$.

1. Montrer qu'il existe des fonctions $g_{i,j} \in \mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathbf{R})$, pour $i, j \in \{1, \dots, n\}$, telles que :

$$\forall x \in \Omega, \quad f(x) = \sum_{i,j=1}^n x_i x_j g_{i,j}(x).$$

2. Généraliser.

Exercice 24. *Fonctions invariantes par translation*

Soient $a, b \in \mathbf{R}$. Déterminer les fonctions $f \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}^2, \mathbf{R})$ telles que :

$$\forall x, y, t \in \mathbf{R}, \quad f(x + ta, y + tb) = f(x, y).$$