

TD 6 : Extrema

Exercice 1. *Extrema libres 1*

Déterminer les extrema locaux, s'ils existent, de la fonction :

$$f : (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mapsto x^3 + xy^2 - x^2y - y^3.$$

Exercice 2. *Extrema libres 2*

Déterminer les points critiques et leur nature de : $(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mapsto 2x^3 - 6xy + 2y^3$.

Exercice 3. *Optimisation d'une fonction quadratique et système linéaire*

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ une matrice symétrique définie positive et $b \in \mathbf{R}^n$. On note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire usuel sur $\mathbf{R}^n$. On pose :

$$\begin{aligned} \phi &: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle - \langle b, x \rangle \end{aligned}$$

1. Montrer que ϕ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et donner l'expression de son gradient et de sa Hessienne.
2. Montrer que ϕ est strictement convexe.
3. Montrer que ϕ admet un unique minimiseur dont on donnera l'expression.
4. Que dire si A est seulement supposée positive ?

Exercice 4. *Extrema libres en fonction d'un paramètre*

Discuter, en fonction du paramètre $\lambda \in \mathbf{R}$, la nature des extrema de la fonction :

$$f : (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mapsto y(x^2 + y^2 - 2\lambda y).$$

Exercice 5. *Plus grande valeur propre d'une matrice symétrique*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ une matrice symétrique. En utilisant le théorème des extrema liés, montrer que

$$\lambda := \max_{\|x\|=1} \langle Ax, x \rangle,$$

est bien définie et est valeur propre de A .

Remarque : on en déduit facilement le théorème spectral en appliquant l'hypothèse de récurrence à l'orthogonal d'un vecteur propre associé à cette valeur propre.

Exercice 6. *Inégalité arithmético-géométrique (cf. Rouvière)*

1. Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ des nombres réels strictement positifs tels que $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = 1$. On considère

$$K = \left\{ x = (x_1, \dots, x_n) \in (\mathbf{R}_+)^n, \sum_{j=1}^n \alpha_j x_j = 1 \right\},$$

et pour tout $x \in K$, on pose $f(x) = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$. Calculer le maximum de f sur K et en déduire l'inégalité suivante :

$$\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in (\mathbf{R}_+)^n, \quad \prod_{j=1}^n x_j^{\alpha_j} \leq \sum_{j=1}^n \alpha_j x_j.$$

Caractériser le cas d'égalité.

2. Parmi tous les parallélépipèdes rectangles de volume V donné, montrer qu'il en existe un unique dont la surface est minimale : lequel est-ce ?

Exercice 7. Extrema liés

On définit l'ensemble $\mathcal{K}$ par :

$$\mathcal{K} = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3, 2x + 4y = 5 \quad \text{et} \quad x^2 + z^2 = 2y\}.$$

Après avoir justifié leur existence, donner les points de $\mathcal{K}$ à distance respectivement minimale et maximale de l'origine.

Exercice 8. Extrema liés

Soit $a \in \mathbf{R}_+^*$. On considère la fonction

$$f : (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mapsto e^{axy}.$$

Etudier les extrema relatifs de la fonction f sur l'ensemble

$$\mathcal{S} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^3 + y^3 + x + y = 4\}.$$

Exercice 9. Distance d'un hyperplan à la sphère

Soient $\mathbf{S}^{n-1}$ la sphère unité de $\mathbf{R}^n$ et $H = \{x \in \mathbf{R}^n, \langle x, v \rangle = a\}$, où $v \in \mathbf{R}^n$ et $a \geq 0$ sont fixés. Déterminer la distance D de l'hyperplan affine H à $\mathbf{S}^{n-1}$. On rappelle qu'elle est définie comme :

$$D := \inf_{(x,y) \in \mathbf{S}^{n-1} \times H} \|x - y\|.$$

Exercice 10. Problème isopérimétrique pour les triangles

Déterminer le triangle ayant une aire maximale parmi les triangles dont le périmètre est fixé.

Indication : On pourra utiliser librement la formule de Héron qui affirme que l'aire d'un triangle dont les côtés ont pour longueurs a , b , et c est égale à :

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

où p est le demi-périmètre du triangle.

Exercice 11. Inégalité de Hadamard (cf. Rouvière)

Démontrer l'inégalité suivante :

$$\forall v_1, \dots, v_n \in \mathbf{R}^n, \quad |\det(v_1, \dots, v_n)| \leq \prod_{j=1}^n \|v_j\|,$$

où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne, et caractériser les cas d'égalité.

Exercice 12. Extrema libres et liés

Soit

$$f : (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mapsto x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2.$$

1. Etudier les extrema locaux de f .
2. Etudier les extrema globaux de f sur l'ensemble :

$$\mathcal{K} := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2, x^4 + y^4 = 1\}.$$