Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E, sous-groupes de $GL(E)$. Applications.

106

Soit K un corps et E un K-espace vectoriel de dimension finie n.

I - Structure du groupe linéaire

1) Définition des groupes général et spécial linéaires

Def 1 : $GL(E)$ désigne l'ensemble des automorphismes de E. $GL_n(K)$ est l'ensemble des matrices $n \times n$ sur K, inversibles.

Rem 2 : Ce sont des groupes, non abéliens si $n \geq 2$.

Prop 3 : Via le choix d'une base, on a un isomorphisme $GL(E) \simeq GL_n(K)$.

Def 4 : Soit $M \in GL_n(K)$. On définit son déterminant par :

$$\det(M) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) M_{1\sigma(1)} \cdots M_{n\sigma(n)}.$$

Ex 5 : Quand $n = 2$, on a $\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$.

Prop 6 : Soit B une base de E. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. La quantité $\det(\mathrm{mat}_B(u))$ ne dépend pas de la base choisie.

Prop 7 : $GL(E) = \{u \in \mathcal{L}(E),\ \det(u) \neq 0\}$.

Prop 8 : $\det : GL(E) \to K^\times$ est un morphisme de groupes.

Def 9 : On appelle groupe spécial linéaire, noté $SL(E)$, le noyau de ce morphisme.

2) Générateurs du groupe linéaire

Def 10 : Soit H un hyperplan de E et $u \in GL(E) \setminus \{id\}$ tq $u_{|H} = id_H$.
On dit que u est une dilation lorsque $\det(u) \neq 1$.
On dit que u est une transvection lorsque $\det(u) = 1$.

Prop 11 : Soit u une dilatation, avec $\det(u) = \lambda$.
Il existe une base B de E telle que $\mathrm{mat}_B u = \mathrm{diag}(1, \dots, 1, \lambda)$.
Soit v une transvection. Il existe une base B' de E telle que $\mathrm{mat}_{B'} v = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & 1 \\ & & & 1 \end{pmatrix}$.

[1]

Théorème 12 : $SL(E)$ est engendré par les transvections, et $GL(E)$ par les transvections et les dilatations.

Def 13 : On note $T_{ij}(\lambda) = I_n + \lambda E_{ij}$, avec $i \neq j$ et $(E_{ij})_{kl} = \delta_{ik}\delta_{jl}$.
Ce sont des matrices de transvections.

Prop 14 : Pivot de Gauss. Soit $M \in GL_n(K)$. Il existe $T_1, \dots, T_r$ des matrices de la forme $T_{ij}(\lambda)$ telles que $T_1 \cdots T_r M = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda \end{pmatrix}$ où $\lambda = \det(M)$. [2]

Exemple 15 : si $M = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in SL_3(\mathbb{R})$, on a

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3) Sous-groupes et quotients remarquables

Prop 16 : $Z(GL(E)) \simeq K^\times$ et $Z(SL(E)) \simeq \mu_n(K)$
$D(GL(E)) = SL(E)$ pour $(n, |K|) \neq (2, 2)$
$D(SL(E)) = SL(E)$ pour $(n, |K|) \notin \{(2,2), (2,3)\}$

Def 17 : Le groupe projectif linéaire est $PGL(E) := \frac{GL(E)}{K^\times}$
Le groupe projectif spécial linéaire est $PSL(E) := \frac{SL(E)}{\mu_n(K)}$ [1]

Application 18 : Pour tous entiers $n, m, r > 1$, il existe un groupe fini G et des éléments a, b de G tels que a soit d'ordre n, b d'ordre m et ab d'ordre r.
Ce groupe G peut se réaliser comme un groupe projectif linéaire

Théorème 19 : $PSL(E)$ est simple, sauf si $(n, |K|) \in \{(2,2), (2,3)\}$

Théorème 20 : Les sous-groupes distingués de $GL_n(K)$ sont isomorphes à des sous-groupes de $K^\times$ ou à des produits semi-directs $SL_n(K) \rtimes L$ avec $L < K^\times$. [2]
(pour $(n, |K|) \notin \{(2,2), (2,3)\}$). (DEV 1)

II - Exemples d'actions de $GL(E)$, stabilisateurs

1) Action sur des espaces vectoriels

Prop 21 : $GL(E)$ agit sur les sommes directes.

Prop 22 : Si $E = \bigoplus_{i=1}^{k} F_i$, le stabilisateur de cette décomposition est isomorphe à $GL(F_1) \times \dots \times GL(F_k)$. [3]

Def 23 : Un drapeau est une suite finie strictement croissante de sous-espaces de E : $(F_0, \dots, F_r)$ avec $F_0 = \{0\}$ et $F_r = E$.
Le drapeau est complet lorsque $r = n$ et $\dim F_i = i \ \forall i$.

Prop 24 : $GL(E)$ agit sur les drapeaux. Le stabilisateur d'un drapeau complet est l'ensemble des matrices triangulaires supérieures.

2) Action sur des matrices

Def 25 : $GL_n(\mathbb{K})$ agit sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ par conjugaison. On dit que A et B sont semblables lorsqu'elles sont dans la même orbite, pour cette action.

Prop 26 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. $Stab(A) = Comm(A) \cap GL_n(\mathbb{K})$

Rem 27 : L'étude de cette action est la théorie de la réduction matricielle.

[3] **Ex 28** : Le stabilisateur d'une homothétie est $GL_n(\mathbb{K})$.

Def 29 : $GL_n(\mathbb{K})$ agit aussi par congruence sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: On dit que A et B sont congruentes lorsqu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $A = {}^tPBP$.

Rem 30 : L'action de congruence sur les matrices symétrique correspond au changement de base dans la représentation des formes bilinéaires symétriques.

Ex 31 : Le stabilisateur de I_n pour cette action est le groupe orthogonal $O_n(\mathbb{K})$.
Soient p, q tels que $p+n = n$. On note $I_{pq} := \begin{pmatrix} I_p & \\ & -I_q \end{pmatrix}$.
Le stabilisateur de I_{pq} par congruence est noté $O(p,q)$.

III - Cas réel ou complexe

On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, et on munit E d'un produit scalaire.

1) Groupes orthogonaux

Def 32 : Soit $u \in GL(E)$. On dit que u est une isométrie lorsque : $\forall x \in E, \forall y \in E, \langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, y \rangle$.

Ex 33 : Les symétries orthogonales sont des isométries.
[4] En particulier, on appelle réflexion une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan.

Prop 34 : L'ensemble des isométries est un groupe, noté $O(E)$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $U(E)$ si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Il est engendré par les réflexions.

Def 35 : $U_n(\mathbb{C}) = \{P \in GL_n(\mathbb{C}), {}^t\overline{P}P = I_n\}$ (matrices unitaires)

Prop 35 : Soit $\mathcal{B}$ une base de E, soit $u \in O(E)$ (resp. $U(E)$). Alors $mat_{\mathcal{B}}(u)$ est dans $O_n(\mathbb{R})$ (resp. $U_n(\mathbb{R})$).
Il y a un isomorphisme $O_n(\mathbb{R}) \simeq O(E)$. (resp. $U_n(\mathbb{C}) \simeq U(E)$)

Def 36 : Le groupe spécial orthogonal (resp. unitaire) est le sous groupe des isométries de déterminant 1. [4]
$SO_n(\mathbb{R}) := O_n(\mathbb{R}) \cap SL_n(\mathbb{R})$ et $SU_n(\mathbb{C}) := U_n(\mathbb{C}) \cap SL_n(\mathbb{C})$.

Ex 37 : Rotations du plan : $SO_2(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.

Prop 38 : $Z(O(E)) = \{\pm id_E\}$ et $Z(SO(E)) = \begin{cases} \{id_E\} & \text{si } n \text{ est impair} \\ \{\pm id_E\} & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$
(de même pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

2) Sous-groupes finis d'isométries

Prop 39 : Les sous-groupes finis de $SO_2(\mathbb{R})$ sont les $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
Les sous-groupes finis de $O_2(\mathbb{R})$ sont les $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et $\mathbb{D}_n$.

Rem 40 : On retrouve la caractérisation de $\mathbb{D}_n$ comme groupe d'isométrie préservant le n-gone régulier.

Théorème 41 : Les sous-groupes finis de $SO_3(\mathbb{R})$ sont [5]
$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}_n$, $\mathcal{A}_4$, $\mathfrak{S}_4$, $\mathcal{A}_5$. [4]

Rem 42 : $\mathcal{A}_4$ se réalise comme le groupe des isométries directes du tétraèdre, $\mathfrak{S}_4$ du cube et de l'octaèdre et $\mathcal{A}_5$ du dodécaèdre et de l'icosaèdre.

Prop 43 : $O_n(\mathbb{R})$ (resp. $SO_n(\mathbb{R})$) admet $\mathfrak{S}_n$ (resp. $\mathcal{A}_n$) comme sous-groupe, par exemple via les matrices de permutations $(P_\sigma)_{ij} = 1$ si $\sigma(i) = j$, 0 sinon.

Rem 44 : $\mathfrak{S}_n$ peut aussi s'injecter dans $O(E)$ comme groupe d'isométries du n-simplexe régulier centré en 0.

3) Topologie sur $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{C}$

Def 45 : La topologie de la norme sur $\mathcal{L}(E)$ (resp. $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$) induit une topologie sur $GL(E)$ (resp. $GL_n(\mathbb{K})$). [3]

Prop 46 : Le produit et le passage à l'inverse sont continus.

Prop 47 : $GL_n(\mathbb{K})$ est un ouvert dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
De plus, $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs et $GL_n(\mathbb{R})$ possède deux composantes connexes par arcs.

[6] Ex 48 : Le déterminant est analytique sur $GL_n(\mathbb{R})$, et pour tout $A \in GL_n(\mathbb{R})$, pour $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$d_A\det(H) = \mathrm{Tr}({}^t\mathrm{Com}A\, H)$$

4) Topologie des groupes orthogonaux

Prop 49 : Les groupes $O_n(\mathbb{R})$, $SO_n(\mathbb{R})$, $U_n(\mathbb{C})$ et $SU_n(\mathbb{C})$ sont compacts.

Prop 50 : $SO_n(\mathbb{R})$ et $SU_n(\mathbb{C})$ sont connexes par arcs. $U_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs. Par contre $O_n(\mathbb{R})$ possède deux composantes connexes par arcs.

Prop 51 : Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Il existe une unique matrice $T \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $T^2 = A$. [3]

Thm 52 : L'exponentielle induit un homéomorphisme $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Thm 53 : Décomposition polaire : on a un homéomorphisme

$$\begin{aligned} GL_n(\mathbb{R}) &\xrightarrow{\sim} O_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \\ OS = M &\longmapsto (O, S) \end{aligned}$$

Théorème 54 : $O(p,q)$ est homéomorphe à $O_p(\mathbb{R}) \times O_q(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{pq}$. (DEV 2)

Coro 55 : $O(p,q)$ est compact si et seulement si $p=0$ ou $q=0$.

IV - Groupe linéaire sur un corps fini

On suppose que $K = \mathbb{F}_q$, pour $q = p^n$ avec p premier.

1) Problèmes de dénombrement

Prop 56 : On a les cardinaux suivants :

- $|GL_n(\mathbb{F}_q)| = (q^n-1)(q^n-q)\cdots(q^n-q^{n-1})$
- $|SL_n(\mathbb{F}_q)| = \dfrac{|GL_n(\mathbb{F}_q)|}{q-1}$ [3]
- $|PGL_n(\mathbb{F}_q)| = \dfrac{|GL_n(\mathbb{F}_q)|}{q-1}$ et $|PSL_n(\mathbb{F}_q)| = \dfrac{|GL_n(\mathbb{F}_q)|}{d(q-1)}$

avec $d = \mathrm{pgcd}(n, q-1)$.

Ex 57 : Si $q = 2$ et $n = 2$:
$|GL_2(\mathbb{F}_2)| = |SL_2(\mathbb{F}_2)| = |PGL_2(\mathbb{F}_2)| = |PSL_2(\mathbb{F}_2)| = 6$.
On verra que ces groupes sont en fait tous isomorphes.

Théorème 58 : Le cardinal de l'ensemble des matrices diagonalisables dans $\mathcal{M}_n(K)$ vaut :

$$\sum_{\substack{(n_1,\dots,n_q)\in\mathbb{N}^q \\ n_1+\dots+n_q=n}} \frac{|GL_n(K)|}{|GL_{n_1}(K)| \times \dots \times |GL_{n_q}(K)|}$$ [3]

Rem 59 : On peut alors calculer la probabilité qu'une matrice aléatoire uniforme sur $\mathcal{M}_n(K)$ soit diagonalisable (voir annexe).

Rem 60 : Une formule analogue existe pour les matrices trigonalisables.

2) Structure des groupes finis

Def 61 : Un p-Sylow de $GL_n(K)$ est un sous-groupe d'ordre une puissance maximale de p.

Lemme 62 : Un p-Sylow de $GL_n(K)$ est d'ordre $q^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

Prop 63 : Soit S un p-Sylow de $GL_n(K)$. Alors S est conjugué au groupe des matrices triangulaires supérieures ayant des 1 sur la diagonale. [3]

Théorème 64 : On a les isomorphismes exceptionnels suivants :

- $GL_2(\mathbb{F}_2) \simeq SL_2(\mathbb{F}_2) \simeq PGL_2(\mathbb{F}_2) \simeq PSL_2(\mathbb{F}_2) \simeq \mathfrak{S}_3$.
- $PSL_2(\mathbb{F}_3) \simeq \mathcal{A}_4$ et $PGL_2(\mathbb{F}_3) \simeq \mathfrak{S}_4$
- $PSL_2(\mathbb{F}_4) \simeq PGL_2(\mathbb{F}_4) \simeq \mathcal{A}_5$
- $PSL_2(\mathbb{F}_5) \simeq \mathcal{A}_5$ et $PGL_2(\mathbb{F}_5) \simeq \mathfrak{S}_5$.

Références :

[1] Perrin, cours d'Algèbre
[2] Orthiz,
[3] Caldero et Germoni, NH_2G_2 tomes 1 et 2
[4] Audin, Géométrie
[5] Delcourt, Théorie des groupes
[6] Rouvière, Petit guide de calcul différentiel

Annexe : Probabilité de tirer une matrice diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{F}_q)$.

q	dimension n				
	1	2	3	4	5
2	100%	50%	11%	1,2%	0,1%
3	100%	48%	11%	1,0%	0,04%
4	100%	48%	12%	1,3%	0,07%
5	100%	49%	13%	1,8%	0,13%
7	100%	49%	14%	2,4%	0,25%
8	100%	49%	14%	2,6%	0,31%
9	100%	50%	15%	2,8%	0,35%