154

Sous-espaces stables par un endomorphisme ou une famille d'endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications.

Soit K un corps et E un K-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}$.

I - Notion de sous-espace stable

1) Définitions

Def 1 : Soit F un sous-espace vectoriel (s.e.v.) de E. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que F est stable par u lorsque $u(F) \subset F$.

Def 2 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et F un sev stable par u. L'application $\begin{array}{l} F \to F \\ x \mapsto u(x) \end{array}$ est appelée endomorphisme induit par u sur F, et sera notée u_F.

Prop 3 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et F stable par u. Alors pour tout $v \in K[u]$, F est stable par v.

Ex 4 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors $\operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Im} u$ sont stables par u.

Prop 5 : Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$, et F un sev stable par u et v. Alors F est stable par $u+v$ et $u \circ v$.

Prop 6 : Soient $u \in \mathcal{L}(E)$, $v \in GL(E)$, F stable par u. Alors $v(F)$ est stable par $v \circ u \circ v^{-1}$.

Exemple 7 : Si u est une transvection d'hyperplan H, et $v \in GL(E)$, alors $v \circ u \circ v^{-1}$ est une transvection d'hyperplan $v(H)$.

Prop 8 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, F stable par u et $\mathcal{B}$ une base de E adaptée à F. Alors

$$\operatorname{mat}_{\mathcal{B}} u = \left(\begin{array}{c|c} A & * \\ \hline 0 & * \end{array}\right)$$ avec A la matrice de u_F dans la base $\mathcal{B}_F$.

Ex 9 : Soit s une symétrie par rapport à F, parallèlement à G. Alors F et G sont stables par s, et dans une base adaptée à $E = F \oplus G$, on a $\operatorname{mat}_{\mathcal{B}} s = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots 1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & \ddots -1 \end{pmatrix}$.

2) Espaces propres et réduction

Rem 10 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, soit $x \in E$. x est vecteur propre de u si et seulement si la droite $\langle x \rangle$ est stable par u.

Prop 11 : $u \in \mathcal{L}(E)$ stabilise toutes les droites de E si et seulement si u est une homothétie.

Def 12 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et λ une valeur propre de u. L'espace $\operatorname{Ker}(u - \lambda \mathrm{id}_E)$ est appelé sous-espace propre.

Prop 13 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et F stable par u.
Alors $\chi_{u_F} \mid \chi_u$ (où χ_v est le polynôme caractéristique de v)
$\pi_{u_F} \mid \pi_u$ (où π_v est le polynôme minimal de v)

Exemple 14 : Soit u nilpotent. Si F est stable par u, alors u_F est encore nilpotent.

Prop 15 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, et F, G deux sev stables par u tels que $E = F \oplus G$.
Alors $\begin{cases} \pi_u = \operatorname{ppcm}(\pi_{u_F}, \pi_{u_G}) \\ \chi_u = \chi_{u_F} \chi_{u_G} \end{cases}$

Prop 16 : Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$ tels que $uv = vu$. Alors les sous-espaces propres de u sont stables par v.

Application 17 : voir la proposition 20.

3) Le cas des endomorphismes diagonalisables

Prop 18 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable et F stable par u. Alors u_F est diagonalisable.

Ex 19 : Soit p un projecteur, $F := \operatorname{Ker} p$, $G := \operatorname{Im} p$. Alors $p_F = 0$ et $p_G = \mathrm{id}$, sont diagonalisables.

Prop 20 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable. On note $E = \bigoplus_{i=1}^{r} E_i$ une décomposition en sous-espaces propres de u. Alors le stabilisateur de u pour l'action par conjugaison de $GL(E)$ sur $\mathcal{L}(E)$ est isomorphe à $GL_{m_1}(K) \times \dots \times GL_{m_r}(K)$, où $m_i = \dim E_i$.

DEV 1

Application 21 : Si $K = \mathbb{F}_q$ avec $q = p^s$, p premier, le nombre de matrices diagonalisables dans $\mathcal{M}_n(K)$ vaut :

$$\sum_{\ell=1}^{q} \binom{q}{\ell} \sum_{\substack{(n_1,\dots,n_\ell) \in \mathbb{N}^{*\ell} \\ n_1+\dots+n_\ell = n}} \frac{|GL_n(K)|}{|GL_{n_1}(K)| \times \dots \times |GL_{n_\ell}(K)|}$$

II - Supplémentaire stable

1) Endomorphismes semi-simples

Def 22 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que u est semi-simple lorsque pour tout F sev stable par u, il existe un supplémentaire de F stable par u.

Ex 23 : Si u est diagonalisable, u est semi-simple.

Prop 24 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ semi-simple. Soit $p \in K[X]$. Si $p(u)$ est nilpotent alors $p(u) = 0$.
En particulier, un endomorphisme semi-simple et nilpotent est nul.

Lemme 25 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que π_u soit irréductible sur K. Soit F stable par u et $v \in E \setminus F$.
Alors $F \cap K[u](v) = \{0\}$.

Prop 26 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que π_u soit irréductible. Alors u est semi-simple.

Ex 27 : Les homothéties sont évidemment semi-simples.
La rotation dans $\mathbb{R}^2$ d'angle $\frac{\pi}{2}$ est semi-simple. (en fait, elle n'a pas de sous-espace stable dans $\mathbb{R}^2$, à part $\mathbb{R}^2$ et $\{0\}$).

Prop 28 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors u est semi-simple si et seulement si π_u est sans facteur carré.

Coro 29 : Les endomorphismes semi-simples de K $\mathcal{L}(E)$ sont ceux qui sont diagonalisables sur une extension de K.

2) Endomorphismes normaux

On suppose ici que $K = \mathbb{R}$ et E est euclidien.

Def 30 : On dit que $u \in \mathcal{L}(E)$ est normal lorsqu'il commute avec son adjoint u^*.

Ex 31 : Les endomorphismes symétriques sont normaux.

Prop 32 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, ~~et soit~~ F un sev stable par u. Alors $F^\perp$ est stable par u^*, si F est stable par u et u^*, alors $F^\perp$ est stable par u et u^* et $(u_F)^* = (u^*)_F$.

Prop 33 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, normal. Alors u et u^* ont les mêmes spectres et les mêmes sous-espaces propres, et ceux-ci sont deux à deux orthogonaux.

Prop 34 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ normal, et F stable par u. Alors $F^\perp$ est stable par u, et $u_F, u_{F^\perp}$ sont normaux.

Ex 35 : Soit ρ une rotation de $\mathbb{R}^3$, et D son axe. Alors $D^\perp$ est un plan stable par ρ, et ρ_D est une rotation de $\mathbb{R}^2$.

3) Représentations de groupe

Soit G un groupe fini

Def 36 : ~~Soit G un groupe fini et~~ $\rho : G \to GL(E)$ un morphisme de groupes. On dit que ρ est une représentation de G.

Def 37 : Soit F un sous-espace vectoriel de E, et $\rho : G \to GL(E)$ une représentation. On dit que F est une sous-représentation de ρ lorsque pour tout $g \in G$, F est stable par $\rho(g)$.

Ex 38 : Soit $\mathfrak{S}_3 \to GL_3(\mathbb{R})$ tel que $\sigma \mapsto P_\sigma = (\delta_{i\sigma(j)})_{ij}$. Alors la droite $\mathrm{Vect}((1,1,1))$ est stable par l'action de $\mathfrak{S}_3$, et la sous-représentation associée est triviale.

Prop 39 (Maschke) : Soit $\rho : G \to GL(E)$ une représentation et F une sous-représentation. Alors il existe F' un supplémentaire de F, stable par l'action de G.

Ex 40 : On reprend l'exemple 38 : l'orthogonal de la droite $\mathrm{Vect}((1,1,1))$ est stable par $\mathfrak{S}_3$. La représentation induite correspond à l'action des isométries d'un triangle régulier dans le plan.

III - Décomposition de Frobenius

1) Endomorphismes cycliques

Def 41 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que u est cyclique lorsqu'il existe $x \in E$ tel que $(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ soit une base de E.

Prop 42 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. u est cyclique ssi $\Pi_u = \chi_u$, ssi il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}} u = \begin{pmatrix} 0 & & a_0 \\ 1 & \ddots 0 & \vdots \\ 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$ soit une matrice compagnon.

Def 43 : Soit $x \in E$. Le polynôme minimal local de $u \in \mathcal{L}(E)$ en x, noté $\Pi_{u,x}$, est l'unique générateur unitaire de l'idéal $\{P \in K[X],\ P(u)(x) = 0\}$.

Prop 44 : L'espace $K[u](x)$ est stable par u, et $u_{K[u](x)}$ est cyclique.

Ex 45 : Soit u nilpotent d'indice n. Soit $x \in E \setminus \mathrm{Ker}\, u^{n-1}$. Alors $(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ est une base de E, et donc u est cyclique.

2) Invariants de similitude

On fixe $u \in \mathcal{L}(E)$.

Prop 46 : Il existe $x_1 \in E$ tel que $\Pi_{u,x_1} = \Pi_u$.

Prop 47 : L'espace $K[u](x_1)$, avec x_1 comme ci-dessus, admet un supplémentaire stable par u.

Thm 48 (Réduction de Frobenius) : Il existe $r \in \mathbb{N}^*$, $(P_1, \dots, P_r) \in K[X]^r$, $(x_1, \dots, x_r) \in E^r$ tq

(i) $P_r \mid P_{r-1} \mid \dots \mid P_1 = \Pi_u$

(ii) $\forall i \in [\![1, r]\!]$, $\Pi_{u,x_i} = P_i$

(iii) $E = \bigoplus_{i=1}^{r} K[u](x_i)$

DEV ②

Prop 49 : L'entier r et la famille $(P_1, \dots, P_r)$ ci-dessus sont uniques, et les P_i sont appelés invariants de similitude de u.

Prop 50 : $u, v \in \mathcal{L}(E)$ sont semblables ssi ils ont les mêmes invariants de similitude.

Coro 51 : Une matrice et sa transposée sont semblables. Si deux matrices sont semblables sur une extension L de K, alors elles sont semblables sur K.