203 — Utilisation de la notion de compacité.

Introduction : notion de compacité

Def 1 : Un espace topologique X est compact lorsqu'il est séparé et que de tout recouvrement ouvert de X on peut extraire un sous-recouvrement fini.

Def 2 : Une partie X d'un espace topologique séparé E est relativement compacte si son adhérence est compacte dans E.

Prop 3 : Les compacts d'un espace séparé sont fermés.

Ex 4 : Ce n'est pas vrai si l'espace ambiant n'est pas séparé : prenons $E = \mathbb{N}$ muni de la topologie grossière. Alors $X := \{0\}$ est compact mais pas fermé.

Thm 5 : Soit E un espace métrique. Alors E est compact ssi toute suite de points de E possède une sous-suite qui converge dans E.

Prop 6 : Soit E un espace métrique compact. Alors E est séparable.

Prop 7 : (Compacts de $\mathbb{C}$) Soit K un compact de $\mathbb{C}$. Alors K^c a une composante connexe non bornée et un nombre au plus dénombrable de composantes bornées.

I - Arguments de compacité pour l'étude de fonctions continues

1) Existence d'extremums

Théorème 8 : Soit K un espace compact et $f : K \to \mathbb{R}$ continue. Alors f est bornée et atteint ses bornes.

Def 9 : Soit K un espace compact et F un espace métrique. On peut munir $C^0(K,F)$ de la distance de la convergence uniforme définie par :

$$d(f,g) = \sup_{x \in K} d_F(f(x), g(x))$$

Ex 10 : La suite de fonction $(f_n)_n$ définie par $f_n : [1,2] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x + \frac{x}{n+1}$ converge uniformément sur $[1,2]$ vers $id_{[1,2]}$.

DEV 1

Application 11 : Soit K un compact convexe de $\mathbb{R}^2$ dont le bord ∂K définit une sous-variété C^1 de dimension 1. Alors il existe une trajectoire fermée à trois rebonds dans K, i.e. un triangle $A_1A_2A_3$ tq $A_1, A_2, A_3 \in \partial K$, et la normale à ∂K au point A_i dirige la bissectrice de l'angle $\widehat{A_{i-1}A_iA_{i+1}}$.

Soit (X,d) un espace métrique compact et F un espace métrique.

Def 12 : Une partie A de $C^0(X,F)$ est dite équicontinue lorsque $\forall x \in X, \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall y \in X, \forall f \in A, d(x,y) < \eta \Rightarrow d_F(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

De même, A est uniformément équicontinue lorsque $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x, y \in X, \forall f \in A, d(x,y) < \eta \Rightarrow d_F(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Prop 13 : A est équicontinue ssi A est uniformément équicontinue.

Théorème 14 (Ascoli) : A est relativement compacte dans $C^0(X,F)$ ssi A est équicontinue et $\forall x \in X, \{f(x), f \in A\}$ est relativement compact dans F. ← insérer un c.ex

Ex 15 (Opérateurs à noyau) : Soit μ une mesure finie sur X. Soit $K \in C^0(X \times X, \mathbb{R})$. On définit l'opérateur $T_K \in \mathcal{L}_c(C^0(X,\mathbb{R}))$ par : $\forall f \in C^0(X,\mathbb{R}), \forall x \in X, T_K f(x) = \int_X K(x,y) f(y) d\mu(y)$.

Soit B la boule unité fermée de $C^0(X,\mathbb{R})$. On peut appliquer le théorème d'Ascoli pour montrer que $T_K(B)$ est relativement compacte.

Def 16 : Soient E et F deux Banach, et $T \in \mathcal{L}_c(E,F)$. On dit que T est compact lorsque $T(B_E(0,1))$ est rel. compacte dans F. On note $K(E,F)$ l'ens. des opérateurs compacts de E dans F.

Application 17 du théorème d'Ascoli : Si $T \in K(E,F)$ alors $T^* \in K(F', E')$.

Lien entre extremums et dérivée :

Thm 18 (Rolle) : Soit $f \in C^0([a,b], \mathbb{R})$, $a < b$. On suppose que f est dérivable sur $]a,b[$, et que $f(a) = f(b) = 0$. (voir annexe) Alors il existe $c \in]a,b[$ tq $f'(c) = 0$.

Rem 19 : C'est un cas particulier du théorème suivant :

Thm 20 (Accroissements finis) : Soit $f \in C^0([a,b], \mathbb{R})$, et dérivable sur $]a,b[$. Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Ex 21 : Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ dont toutes les racines sont réelles. Alors P' a aussi toutes ses racines réelles.

Contre-exemple 22 : Soit $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $f(x) = e^{ix} - 1$. Alors f est continue sur $[0,2\pi]$, dérivable sur $]0, 2\pi[$, $f(0) = f(2\pi) = 0$, mais $f'(x) = ie^{ix}$ ne s'annule pas.

2) Existence de points fixes

Théorème 23: Soit (X,d) un espace métrique compact. Soit $F : X \to X$ telle que $\forall x \neq y$, $d(F(x),F(y)) < d(x,y)$. Alors F admet un unique point fixe, qui est limite de toute suite $\begin{cases} x_0 \in X \\ x_{n+1} = F(x_n) \end{cases}$.

Contre-exemple 24: Si X n'est pas compact, le théorème est faux : prenons $X = \mathbb{R}$ et $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = \sqrt{x^2+1}$. On a bien que $\forall x \neq y$, $|F(x)-F(y)| < |x-y|$ mais F n'a pas de point fixe. (voir annexe)

Ex 25: Soit $f : [-1,1] \to [-1,1]$, $f(x) = \frac{x^2}{2}$. Alors f n'est pas une contraction mais pour tout $x \neq y$, $|f(x)-f(y)| < |x-y|$. Ainsi l'unique point fixe de f est 0.

Rem 26: Si l'on veut affaiblir l'hypothèse de compacité, on doit renforcer l'hypothèse de contraction sur f : c'est le théorème du point fixe de Banach.

Application 27: Soient E un Banach et $T \in \mathcal{L}_c(E)$. Le spectre de T est défini par $\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{R},\ T - \lambda I \text{ n'est pas bijectif}\}$. Alors $\sigma(T)$ est compact, inclus dans $[-\|T\|, \|T\|]$.

3) Approcher des fonctions continues

Thm 28 (Heine): Soit (X,d) un métrique compact et (F,d_F) un espace métrique. Soit $f \in C^0(X,F)$. Alors f est uniformément continue :
$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x,y \in X, d(x,y) < \delta \Rightarrow d_F(f(x),f(y)) < \varepsilon$.

Contre-ex 29: Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. Alors f n'est pas uniformément continue.

Application 30: Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, continue. Alors f est limite uniforme de fonctions en escalier.

Théorème 31 (Dini): Soit K un compact de $\mathbb{R}$ et $(f_n)_n$ une suite croissante de fonctions continues sur K qui converge simplement vers f sur K, avec f continue. Alors la convergence est uniforme.

Application 32: Soit $a > 0$. Il existe une suite $(P_n)_n \in \mathbb{R}[X]^{\mathbb{N}}$ convergeant uniformément sur $[-a,a]$ vers $t \mapsto |t|$.

Théorème 33 (Stone-Weierstrass): Soit K un compact de $\mathbb{R}$. Alors l'ensemble des fonctions polynomiale sur K est dense dans $C^0(K,\mathbb{R})$.

Contre-ex 34: L'hypothèse de compacité est nécessaire. Par exemple, toute limite uniforme sur $\mathbb{R}$ de fonctions polynomiale est un polynôme.

Ex 35: Soit $f \in L^1(\mathbb{R}_+^*)$, telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\int_0^{\infty} f(t) e^{-nt}\, dt = 0$. Alors $f = 0$.

Thm 36 (Runge). Soit K un compact de $\mathbb{C}$, ω_0 la composante connexe non bornée de K^c et $(\omega_n)_{n \geq 1}$ les c.c. bornées de K^c (voir prop. 7). Soit $(a_n)_{n \geq 1}$ telle que $a_n \in \omega_n$ $\forall n \geq 1$. Soit $a \in K^c$. Alors $z \mapsto \frac{1}{z-a}$ est limite uniforme sur K de fractions rationnelles dont les pôles sont parmi les a_n.

II - Compacité dans les espaces vectoriels normés

1) Caractérisations de dimension finie

Lemme 37: Soit E un espace normé et F un sous-espace fermé. Si $F \neq E$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x \in E$ tel que $\|x\| = 1$ et $d(x,F) \geq 1 - \varepsilon$.

Thm 38 (Riesz): Soit E un espace vectoriel normé. Alors E est de dimension finie ssi $B_E(0,1)$ est relativement compact.

Application 39: Les applications linéaires sont continues en dimension finie.

Application 40 (Alternative de Fredholm). Soit E un espace vectoriel normé, et $T \in K(E)$. Alors :
(i) $\mathrm{Ker}(I-T)$ est de dimension finie
(ii) $\mathrm{Im}(I-T)$ est fermé et $\mathrm{Im}(I-T) = \mathrm{Ker}(I-T^*)^{\perp}$
(iii) $\mathrm{Ker}(I-T) = \{0\}$ ssi $\mathrm{Im}(I-T) = E$
(iv) $\dim \mathrm{Ker}(I-T) = \dim \mathrm{Ker}(I-T^*)$.

Thm 41: Les normes sont équivalentes en dimension finie.

2) Opérateurs compacts

Soit E un espace de Banach de dimension infinie.

Théorème 42: Soit $T \in K(E)$. Alors

(i) $0 \in \sigma(T)$

(ii) $\sigma(T) \setminus \{0\} = vp(T) \setminus \{0\}$ où $vp(T) := \{\lambda \in \mathbb{R}, T - \lambda I$ est pas injectif$\}$

(iii) $\sigma(T) = \{0\}$
ou $\sigma(T) \setminus \{0\}$ est fini
ou $\sigma(T) \setminus \{0\}$ est une suite qui tend vers 0

Exemple 43: Soit $T \in \mathcal{L}_c(C^0([0,1],\mathbb{R}))$, défini par
$Tf(x) = \int_0^{1-x} f(t)dt \quad \forall f \in C^0([0,1],\mathbb{R}), \forall x \in [0,1]$.

Alors T est compact, d'après le théorème d'Ascoli.
De plus, on a $\sigma(T) = \{0\} \cup \left\{ \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}, k \in \mathbb{Z} \right\}$.
On est dans le dernier cas du théorème.

Exemple 44: Soit $T \in \mathcal{L}_c(C^0([0,1],\mathbb{R}))$, défini par
$Tf(x) = \int_0^{x} f(t)dt \quad \forall f \in C^0([0,1],\mathbb{R}), \forall x \in [0,1]$.
Alors T est compact, et $\sigma(T) = \{0\}$. De plus 0 n'est pas valeur propre de T.
On est dans le premier cas du théorème.

Rem 45: L'hypothèse de compacité est cruciale : par exemple, si $T = id_E$, on n'a pas $0 \in \sigma(T)$!

Dorénavant, on se place dans $E = H$ un espace de Hilbert

Def 46: On dit que $T \in \mathcal{L}_c(H)$ est autoadjoint lorsque $T^* = T$, i.e. $\forall u, v \in H, \langle Tu, v \rangle = \langle u, Tv \rangle$.

Prop 47: Soit $T \in \mathcal{L}_c(H)$ autoadjoint. Alors $\sigma(T) \subset [m, M]$, $m \in \sigma(T)$ et $M \in \sigma(T)$, où
$m = \inf_{\substack{u \in H \\ \|u\|=1}} \langle Tu, u \rangle$ et $M = \sup_{\substack{u \in H \\ \|u\|=1}} \langle Tu, u \rangle$.

Corollaire 48: Si $T \in \mathcal{L}_c(H)$ est autoadjoint et $\sigma(T) = \{0\}$, alors $T = 0$.

Exemple 49: ce n'est pas le cas en général, cf l'exemple 44.

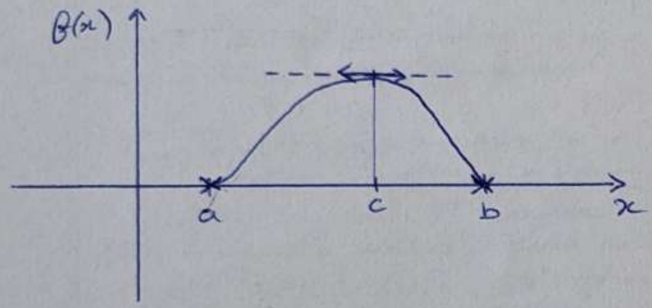
Théorème 50: Si H est séparable et $T \in K(H)$, autoadjoint, alors H admet une base hilbertienne formée de vecteurs propres de T. $\boxed{\text{DEV } ②}$

Ex 51: Si H est de dimension finie, on retrouve le théorème spectral.

Ex 52: Soit $T : L^2([0,1]) \to L^2([0,1])$ tel que
$Tf(x) = \int_0^{1-x} f(t)dt \quad \forall x \in [0,1], \forall f \in L^2([0,1])$.
Alors T est autoadjoint compact

Annexes:

① Illustration du théorème de Rolle :



② Contre-exemple au théorème de point fixe :