204 Connexité. Exemples et applications.

Introduction : les connexes de $\mathbb{R}$

Def 1 : Une partie A de $\mathbb{R}$ est dite connexe lorsque toute fonction continue $f : A \to \{0,1\}$ est constante.

Rem 2 : Cela signifie "intuitivement" que A est d'un seul morceau.

Def 3 : Un intervalle de $\mathbb{R}$ est une partie $I \subset \mathbb{R}$ telle que $\forall u, v \in I$, $[u,v] \subset I$ où $[u,v] := \{t \in \mathbb{R}, u \leq t \leq v\}$.

Prop 4 : Les connexes de $\mathbb{R}$ sont exactement les intervalles.

Théorème 5 : Soit U un ouvert de $\mathbb{R}$. Alors U est la réunion d'une famille dénombrable d'intervalles ouverts deux à deux disjoints.

I - Connexité dans un espace topologique quelconque

1) Notion de connexité

Def 6 : Soit X un espace topologique. On dit que X est connexe lorsque toute partie simultanément ouverte et fermée de X est soit vide soit égale à X.

Prop 7 : Il y a équivalence entre :
- (i) X est connexe
- (ii) X n'est pas réunion de deux ouverts disjoints non vides
- (iii) " " fermés " "
- (iv) Toute application continue $f : X \to \{0,1\}$ est constante.

Ex 8 : Tout espace muni de la topologie grossière est connexe.
- Un espace discret connexe a au plus un point.
- $[0,1]$ est connexe (on verra plus loin son importance).

Prop 9 : Soit X connexe, $f : X \to Y$ une fonction continue. Alors $f(X)$ est connexe dans Y.

Coro 10 : Un espace homéomorphe à un connexe est connexe.

Ex 11 : Soient $a < b \in \mathbb{R}$. $[a,b]$ est homéomorphe à $[0,1]$ via $x \mapsto (b-a)x + a$. On retrouve que tout segment de $\mathbb{R}$ est connexe.

Ex 12 : $GL_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe, sinon son image par le déterminant, $\mathbb{R}^*$, serait connexe.

Rem 13 : L'image réciproque d'un connexe par une applicat° continue n'est pas forcément connexe : soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. Alors $f^{-1}([1, +\infty[) =]-\infty, -1[\sqcup]1, +\infty[$.

Prop 14 : Soit X un espace topologique et $(X_i)_{i \in I}$ des connexes de X. (iv) $\prod_{i \in I} X_i$ est connexe pr la topologie produit
- (i) Si $\bigcap_{i \in I} X_i \neq \emptyset$ alors $\bigcup_{i \in I} X_i$ est connexe
- (ii) Si I est dénombrable et $\forall i \in I$, $X_i \cap X_{i+1} \neq \emptyset$, alors $\bigcup_{i \in I} X_i$ est connexe
- (iii) On ne peut rien dire de l'intersection des X_i.

Ex 15 : Soit $X_1 =]-\infty, 0[$ et $X_2 =]0, +\infty[$. Alors $X_1 \cup X_2$ n'est pas connexe, même si $\overline{X_1} \cap \overline{X_2} \neq \emptyset$.
- voir l'annexe pour des illustrations des points (ii) et (iii).

Prop 16 : Soit A une partie d'un espace topologique X, et C une partie connexe de X. Si C intersecte A et $X \setminus A$ alors $C \cap \partial A \neq \emptyset$. (voir annexe)

2) Composantes connexes

Théorème 17 : Soit X un espace topologique et $x \in X$. Il existe une plus grande partie connexe de X contenant x. On l'appelle composante connexe de x dans X.

Ex 18 : $GL_n(\mathbb{R})$ possède deux composantes connexes, correspondant à $\det^{-1}(\mathbb{R}_+^*)$ et $\det^{-1}(\mathbb{R}_-^*)$.

Prop 19 :
- La relation "être dans la même composante connexe" est une relation d'équivalence.
- Les composantes connexes sont fermées dans X.
- Si $X = \bigsqcup_{i \in I} \omega_i$ avec pour tout i ω_i ouvert connexe non vide, alors les ω_i sont les composantes connexes de X.

Ex 20 : Prenons $X = \mathbb{Q}$ muni de la topologie induite par celle de $(\mathbb{R}, |\cdot|)$. Alors $\{0\}$ est une composante connexe de $\mathbb{Q}$ mais $\{0\}$ n'est pas ouvert.

Prop 21 : Soit K un compact de $\mathbb{C}$. Alors K^c possède exactem^t :
- une composante connexe non bornée
- un nombre au plus dénombrable de composantes connexes bornées.

Application 22 (Runge) : Soit K un compact de $\mathbb{C}$. On note ω_0 sa c.c. non bornée et $(\omega_n)_{n\geq 1}$ les autres c.c. Soit $(a_n)_n$ une suite telle que $a_n \in \omega_n \ \forall n \geq 1$. Soit $a \in K^c$. Alors $\varphi_a : z \mapsto \frac{1}{z-a}$ est limite uniforme sur K de fractions rationnelles dont les pôles éventuels sont parmi les a_n. $\boxed{\text{DEV 1}}$

3) Un cas particulier : connexité par arcs

Def 23 : Soit X un espace topologique. On dit que X est connexe par arcs lorsque : $\forall (x,y) \in X^2, \exists \gamma : [0,1] \to X$ continue telle que $\gamma(0) = x$, $\gamma(1) = y$.

Ex 24 : $\mathbb{S}^1$ est connexe par arcs, via $\exp : [0,1] \to \mathbb{S}^1$.

Prop 25 : Tout connexe par arcs est connexe. La réciproque est fausse.

Ex 26 : Soit $X = \overline{\{(x, \sin(\frac{1}{x})), 0 < x \leq 1\}}$ dans $\mathbb{R}^2$. Alors X est connexe mais pas connexe par arcs.

Ex 27 : $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs, donc connexe. L'ensemble $\mathcal{C}_r$ des matrices de rang r est connexe.

Ex 28 : Tout espace étoilé est connexe par arcs (voir annexe)

II - Utilisation de la connexité en analyse

1) Retour sur le cas réel

Théorème 29 (Valeurs intermédiaires) : Soit X un espace connexe et $f : X \to \mathbb{R}$ continue. Si $a, b \in f(X)$ avec $a < b$, alors $[a,b] \subset f(X)$.

Coro 30 (Théorème de la bijection) : Soit $I =]\alpha, \beta[$ intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ continue, strictement monotone. Alors f admet une limite en α et β, et réalise un homéomorphisme de I dans $]\lim_{x\to\alpha} f(x), \lim_{x\to\beta} f(x)[$.

Ex 31 : L'exponentielle $e : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ réalise un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$, de réciproque $\ln : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$.

Théorème 32 (Brouwer en dimension 1) : Soient $a < b \in \mathbb{R}$. Soit $f : [a,b] \to [a,b]$ continue. Alors f admet un point fixe.

Ex 33 : Un segment n'est pas homéomorphe à un cercle, car il existe des fonctions continues de $\mathbb{S}^1$ dans $\mathbb{S}^1$ qui n'ont pas de points fixes.

Prop 34 (Points antipodaux) : Soit $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ continue. Alors il existe $z \in \mathbb{S}^1$ telle que $f(z) = f(-z)$.

Thm 35 (Darboux) : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dérivable. Alors pour tout intervalle I de $\mathbb{R}$ non vide, $f'(I)$ est un intervalle.

Ex 36 : (Fonction dérivable mais pas C^1) : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{|x|^{4/3}}$ si $x \neq 0$, $f(0) = 0$. Alors f est dérivable mais pas C^1.

2) Connexité dans le plan complexe

Théorème 37 : Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$. Soient f et g deux fonctions holomorphes sur Ω coïncidant sur un ouvert non vide de Ω. Alors $f = g$ sur Ω.

Application 38 : Soit $\Gamma : \{z \in \mathbb{C}, \mathrm{Re}(z) > 0\} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$.
Γ est holomorphe, et coïncide avec la fonction $z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{n+z} + \int_1^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$, qui est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_-$.
D'après le théorème 37, Γ se prolonge de manière unique à $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_-$.

Théorème 39 (Principe du maximum) : Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$. Soit $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$ continue, holomorphe sur Ω. Alors $\forall z \in \Omega$, $|f(z)| \leq \max_{\partial\Omega} |f|$. Le maximum est atteint sur Ω si et seulement si f est constante.

Application 40 : Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, $d^\circ P \geq 2$. On considère
$K := \{ z \in \mathbb{C} \mid$ la suite $z_0 = z$, $z_{n+1} = P(z_n)$ est bornée $\}$
Alors K est compact et K^c est connexe par arcs.
$\boxed{\text{DEV 2}}$

Rem 41 : La frontière de l'ensemble K ci-dessus est appelée ensemble de Julia.

3) Connexité et différentiabilité : du local au global

Prop 42 : Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$, dérivable. Alors f est constante ssi $f' = 0$ sur I.

Coro 43 : Deux primitives d'une même fonction diffèrent d'une constante additive.

Ex 44 : Soit $f :]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[\to \mathbb{R}$
$$x \mapsto \begin{cases} -1 & \text{si } x \leq -1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$
Alors f est dérivable,
$f' = 0$ mais f n'est pas constante.

Thm 45 (Cauchy-Lipschitz global) : Soit $f : I \times U \to \mathbb{R}$ avec I, U des intervalles de $\mathbb{R}$, et f continue et lipschitzienne par rapport à sa deuxième variable. Alors le problème de Cauchy suivant admet une unique solution :
$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad \text{avec } t_0 \in I,\ y_0 \in \mathbb{R}.$$

Ex 46 :

Rem 47 : En fait, la proposition 42 est valable dans un cadre beaucoup plus général :

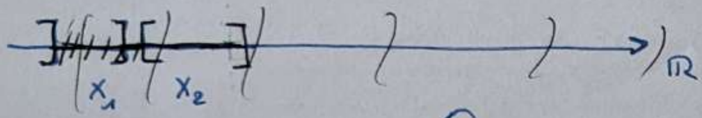
Théorème 48 : Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $T \in \mathcal{D}'(I)$. Si $T' = 0$ dans $\mathcal{D}'(I)$, alors il existe $c \in \mathbb{R}$ tq $T = c$ dans $\mathcal{D}'(I)$.

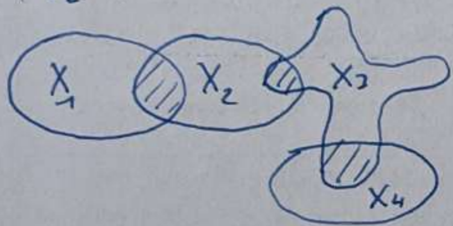
Rem 49 : La nécessité de l'hypothèse de connexité sur I est cachée. En fait, on a besoin que I soit connexe pour pouvoir définir les primitives des fonctions test comme des intégrales.

Annexes :

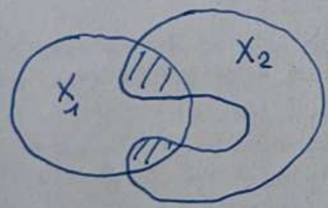
① Stabilité de la notion de connexité :

(ii) Chaîne de connexes :

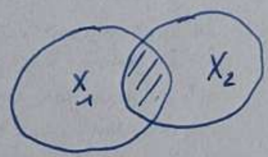




(iii) Intersection de connexes :

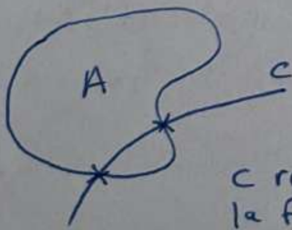


$X_1 \cap X_2$ pas connexe

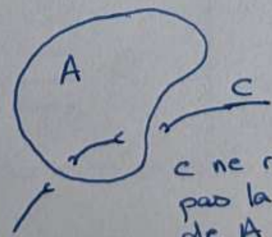


$X_1 \cap X_2$ connexe

② Passage des douane :



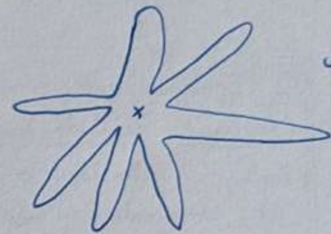
c rencontre la frontière de A.



c ne rencontre pas la frontière de A (manque de connexité)

③ Connexité par arcs :

$\mathbb{S}^1$ est connexe par arcs



un espace étoilé