Espaces complets. Exemples et applications.

Perrine Jouteur

205 : Espaces complets. Exemples et applications.

L'un des intérêts essentiels de la complétude est de fournir des théorèmes d'existence : que ce soit tout simplement dans $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ mais aussi dans certains espaces de dimension infinie (par exemple dans certains espaces de fonctions). Il est important de présenter des exemples d'espaces usuels, dont on sait justifier la complétude. Un candidat à l'agrégation doit manifester une bonne maîtrise de la convergence uniforme. On peut évoquer dans cette leçon des théorèmes classiques tels que le théorème du point fixe des applications contractantes et le théorème de Cauchy-Lipschitz.

Les espaces L^p sont des exemples pertinents qui ne sont pas sans danger pour des candidats aux connaissances fragiles (les $\ell^p(\mathbf{N})$, peut-être plus accessibles, fournissent déjà de beaux exemples).

On ne s'aventurera pas à parler du théorème de Baire sans applications pertinentes et maîtrisées (elles sont nombreuses). Un développement autour des fonctions continues nulle part dérivables est très souvent proposé, mais extrêmement rares sont les candidats qui arrivent avec succès jusqu'au bout. Le jury attire l'attention sur le fait qu'il existe des preuves constructives de ce résultat qui n'utilisent pas le théorème de Baire.

La construction de l'espace $H_0^1(]0,1[)$ pourra être abordée par les candidats qui le souhaitent avec des applications illustrant l'intérêt de cet espace.

1 Plan

Fil rouge : On va étudier les espaces complets en partant des espaces topologiques tous bêtes et en ajoutant de la structure au fur et à mesure.

I - Espaces métriques complets

1) Suites de Cauchy
- Définitions et propriétés de bases : Colmez page 68.
- Définition d'espace complet
- Stabilité par produit
- Stabilité par sous-espace fermé

2) Complétion et prolongement
- cf Colmez p.71 pour l'unicité du complété d'un espace
- Remarque : la complétude est une notion métrique, pas topologique, cf Hauchecorne page 313.
- Suite de Cauchy et application uniformément continue
- Théorème de prolongement
- Application : Plancherel
- Application : Développement 1 : Rademacher

3) Théorème du point fixe
- Énoncé : cf Rouvière
- Exemples et contre-exemples si c'est pas complet
- Application : Cauchy-Lipschitz, théorème d'inversion locale

II - Espaces de Banach

1) Exemples d'espaces classiques
- Définition, exemples de bases cf Colmez
- Espaces de fonctions continues, ...
- Caractérisation avec les séries
- Espace des applications linéaires continues entre deux Banach est un Banach
- Application : exponentielle d'opérateurs
- Riesz-Fischer

2) Théorème de Baire et conséquences
- Théorème de Baire cf Gourdon
- Application : il n'y a pas de base algébrique dénombrable dans les espaces vectoriels complets de dimension infinie
- Corollaire 1 : Banach Steinhauss cf Brézis
- Application : contre-exemple de Féjer
- Corollaire 2-3 : Application ouverte, graphe fermé
- Remarque : on verra un peu plus loin une application de ces corollaires

III - Espaces de Hilbert

1) Définitions et exemples classiques
- cf Colmez
- Identité du parallélogramme, base hilbertienne
- Grothendieck
- Bergman : développement 2

2) Théorème de projection et conséquences
- cf Brézis
- Exemples, contre-exemples
- Application : Parseval, ?
- Représentation de Riesz
- Application : construction de l'adjoint

3) Application à l'optimisation
- Théorèmes de Stampacchia et Lax-Milgram (Brézis)
- cf Ciarlet et Testard

2 Développement

- Bergman
- Rademacher

3 Références

- Brézis
- Testard
- Rouvière
- Ciarlet
- Gourdon
- Colmez
- Hauchecorne

4 Exos/questions classiques

Exercices posés pendant l'oral blanc :

• <u>Exercice 1</u> : Soit $[0,1]^{\mathbb{N}}$ l'espace des suites à valeurs dans $[0,1]$. On le munit de la distance suivante :

$$d(x,y) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{|x_n - y_n|}{2^{n+1}}$$

Montrer qu'il s'agit d'un espace complet.

$\rightarrow$ Méthode 1 : de manière pédestre, on prend une suite de Cauchy, on montre que chaque suite coordonnée est de Cauchy dans $[0,1]$ donc converge dans $[0,1]$, ce qui définit une suite à valeurs dans $[0,1]$ et on montre par un théorème d'interversion somme-limite que la suite de Cauchy initiale converge vers la suite limite pour la distance d.

$\rightarrow$ Méthode 2 : on montre que cette distance métrise la topologie produit sur $[0,1]^{\mathbb{N}}$, et par théorème de Tychonov dénombrable, $[0,1]^{\mathbb{N}}$ est compact donc complet.

• <u>Exercice 2</u> : Soit E un espace de Banach et $T : E \longrightarrow \ell^1(\mathbb{N})$ une application linéaire continue surjective. On note (e_n) la base canonique de $\ell^1(\mathbb{N})$, i.e. pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(e_n)_k = \delta_{kn}$.
1) Montrer qu'il existe des éléments (u_n) de E et une constante $r > 0$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T(u_n) = e_n$ et $||u_n||_E \leqslant r$.
2) En déduire qu'il existe $S : \ell^1(\mathbb{N}) \longrightarrow E$ une application linéaire continue telle que $T \circ S = \mathrm{id}_{\ell^1}$.

1) $\rightarrow$ On utilise le théorème de l'application ouverte, en disant que l'image de la boule unité de E par T est ouverte dans $\ell^1(\mathbb{N})$, et donc qu'il existe $\tilde{r} > 0$ tel que $B_{\ell^1}(0,\tilde{r}) \subset T(B_E(0,1))$.
Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, si on pose $\tilde{e_n} = \frac{\tilde{r}}{2} e_n$, il existe $\tilde{u_n} \in B_E(0,1)$ tel que $T(\tilde{u_n}) = \tilde{e_n}$. Posons $r := \frac{2}{\tilde{r}}$ et $u_n := r\tilde{u_n}$. On a ce qu'on voulait.

2) $\rightarrow$ Définissons S sur la base (e_n). On pose $S(e_n) = u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On étend S à $Vect(e_n)$ par linéarité, et on va montrer que S s'étend à $\ell^1(\mathbb{N})$, grâce au théorème de prolongement, qui va s'appliquer car E est complet. Soit $x = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n e_n$ un élément de l'espace engendré par les e_n (il s'agit donc d'une somme finie). On a $||S(x)|| \leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n| r$ par hypothèse sur les u_n, et donc $||S(x)|| \leqslant r||x||_1$. Ainsi S est linéaire et continue sur l'espace engendré par les e_n, donc elle est uniformément continue et par théorème de prolongement, on peut l'étendre à $\ell^1(\mathbb{N})$.
Puis on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T \circ S(e_n) = e_n$. Donc $T \circ S = \mathrm{id}_{\ell^1(\mathbb{N})}$.

• <u>Exercice 3</u> : Soit E un espace de Banach et $T : E \longrightarrow E'$, une application linéaire. On notera $T_x := T(x)$. On suppose que pour tout $x \in E$, on a $T_x(x) \geqslant 0$. On va montrer que T est continue.
1) Montrer que si (x,f) est dans l'adhérence du graphe de T, alors pour tous $x, y \in E$, $f(x-y) + T_x(x-y) - T_y(x-y) \geqslant T_x(x-y)$.
2) En déduire que pour tout $x \in E$, $f(x) = T_x$, et conclure.

1) $\rightarrow$ Soit (x,f) dans l'adhérence du graphe de T. Soit $x_n \in E^{\mathbb{N}}$ telle que $x_n \longrightarrow x$ dans E. Alors $T_{x_n} \longrightarrow f$ dans E'. Soit $y \in E$. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis par continuité de T_x,

$$T_{x_n}(x_n - y) + T_x(x_n - y) - T_y(x_n - y) = T_{x_n - y}(x_n - y) + T_x(x_n - y) \geqslant T_x(x_n - y) \longrightarrow T_x(x - y)$$

D'où le résultat en passant à la limite.

2) $\rightarrow$ En simplifiant l'inégalité ci-dessus et en échangeant les rôles de x et de y, on a que pour tout $x, y \in E$,

$$f(x-y) \leqslant T_x(x-y)$$

Autrement dit, pour tout $u \in E$, $f(u) \leqslant T_x(u)$. En prenant $v = -u$, on a aussi l'inégalité opposée. Donc $f = T_x$. Et ainsi le graphe de T est fermé. Par théorème du graphe fermé, T est continue.

• <u>Exercice 4</u> : Soit H un Hilbert réflexif, V un sous-espace vectoriel de H dense dans H. On note $||\cdot||$ la norme de H, et on suppose que V est aussi muni d'une norme $||\cdot||_V$ telle que l'injection $(V, ||\cdot||_V) \longrightarrow (H, ||\cdot||)$ soit continue.
Soit $T : H \longrightarrow V'$ telle que pour tout $f \in H$, $T_f : v \mapsto < v, f >$.
1) Montrer que T est continue.
2) Montrer que si $v \in V$ vérifie $T_f(v) = 0$ pour tout $f \in H$, alors $v = 0$.

3) Montrer que $T(H)$ est dense dans V'.

1) $\rightarrow$ On utilise Cauchy-Schwarz.

2) $\rightarrow$ Appliquer en $f = v$.

3) $\rightarrow$ Là il faut passer par un corollaire de Hahn-Banach : un sev est dense ssi toute forme linéaire continue nulle sur le sev est en fait identiquement nulle. On exploite aussi la réflexivité de H, pour transformer les éléments de V'' en vecteurs de V.