Def 1 : Une suite $(u_n)_n \in (\mathbb{C}^d)^{\mathbb{N}}$ est dite récurrente lorsqu'il existe $f : \mathbb{C}^d \to \mathbb{C}^d$ telle que $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \geq 0$. On notera une telle suite $(u_{n+1} = f(u_n))$.

Prop 2 : Soit $(u_{n+1} = f(u_n))$ une suite récurrente, convergeant vers $\ell \in \mathbb{C}^d$. Si f est continue, alors ℓ est un point fixe de f.

I - Cas particuliers de fonctions itératives simples

1) Les cas affines

Def 3 : Une suite arithmético-géométrique est une suite récurrente scalaire dont la fonction itérative est affine : $u_{n+1} = au_n + b$ pour tout $n \geq 0$.

Ex 4 : Suites arithmétiques : $u_{n+1} = u_n + b$: $u_n = u_0 + nb$

géométriques : $u_{n+1} = au_n$: $u_n = u_0 a^n$.

Prop 5 : Une suite arithmético-géométrique $(u_{n+1} = au_n + b)$ converge ssi $|a| < 1$ ou $u_0 = 0$ et $b = 0$, et dans ce cas la limite est $\frac{b}{1-a}$ ou 0.

Def 6 : Soit $d \in \mathbb{N}^*$, et $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$. La suite vectorielle définie par $X_0 \in \mathbb{C}^d$, $X_{n+1} = AX_n$ est dite récurrente linéaire homogène.

Ex 7 : Soient $a_1, \dots, a_d \in \mathbb{C}$, et $(u_n)_n$ définie par $(u_0, \dots, u_{d-1}) \in \mathbb{C}^d$ et $u_n = a_1 u_{n-1} + \dots + a_d u_{n-d}$ $\forall n \geq d$.
On peut vectorialiser cette suite, en posant $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ \vdots \\ u_{n+d-1} \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ a_d & \cdots & \cdots & \cdots & a_1 \end{pmatrix}$.

Prop 8 : On reprend les notations de l'exemple 7. Soient $r_1, \dots, r_q$ les racines de l'équation caractéristique
$$x^d - a_1 x^{d-1} - \dots - a_d = 0,$$
et $\alpha_1, \dots, \alpha_q$ leurs multiplicités. Alors il existe des polynômes $P_1, \dots, P_q$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = P_1(n) r_1^n + \dots + P_q(n) r_q^n$ et $d^\circ P_i < \alpha_i$ $\forall i$.

Ex 9 : Si $d = 1$, on retrouve les suites géométriques.
Si $d = 2$, on peut distinguer deux cas :

- Cas 1 : l'équation $x^2 - a_1 x - a_2 = 0$ possède deux racines distinctes r_1, r_2. Alors il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ tels que $u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$, pour tout n.
- Cas 2 : l'équation $x^2 - a_1 x - a_2 = 0$ possède une racine double r. Alors $u_n = (\lambda n + \mu) r^n$ pour tout n.

2) Les cas polynomial et homographiques

Rem 10 : On a traité les cas où f est un polynôme de degré au plus 1. Voyons ce qu'il en est si f est un polynôme de degré supérieur.

Prop 11 : Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, $d^\circ P \geq 2$. On considère $K := \left\{ z \in \mathbb{C}, \text{ la suite } \begin{cases} z_{n+1} = P(z_n) \\ z_0 = z \end{cases} \text{ est bornée} \right\}$.
Alors K est compact et K^c est connexe par arcs. DEV 1

Ex 12 : Si $P = X^2 + c$, avec $c \in \mathbb{C}$, on retrouve les ensembles de Julia (voir annexe).

Def 13 : Soient $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ tels que $ad - bc \neq 0$. On définit une suite récurrente homographique par
$u_{n+1} = \dfrac{au_n + b}{cu_n + d}$, $u_0 \in \mathbb{C}$.

Prop 14 : Avec les mêmes notations qu'en définition 13 :
Soit (1) $cx^2 - (a-d)x - b = 0$.
Si (1) admet deux racines distinctes α, β, alors pour tout n,
$$\frac{u_n - \alpha}{u_n - \beta} = K^n \frac{u_0 - \alpha}{u_0 - \beta} \quad \text{avec } K = \frac{a - \alpha c}{a - \beta c}.$$
Si (1) admet une racine double α, alors pour tout n,
$$\frac{1}{u_n - \alpha} = \frac{1}{u_0 - \alpha} + Kn \quad \text{où } K = \frac{c}{a - \alpha c}.$$

Ex 15 : Si $c = 1$ et $d = 0$, on retrouve les suites arithmético-géo.

3) Les cas monotones

Prop 16 : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ tq $f(I) \subset I$. Soit $(u_{n+1} = f(u_n))_n$ une suite récurrente, avec $u_0 \in I$.
- si f est croissante, alors $(u_n)_n$ est monotone. De plus, elle est croissante ssi $u_1 - u_0 \geq 0$. (voir annexe).

- Si f est décroissante, les suites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ sont monotones.

Prop 17 : Si I est compact et $f : I \to I$ croissante, alors f admet un point fixe dans I.
De plus, la suite $(u_{n+1} = f(u_n))_n$, avec $u_0 \in I$, converge.
Si f est continue, la limite de $(u_n)_n$ est un point fixe de f.

C. ex 18 : Si $f : [0,1] \to [0,1]$, $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{1}{4} & \text{si } x < \frac{1}{2} \\ 1 & \text{si } x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$
alors la suite $u_{n+1} = f(u_n)$, $u_0 = 0$ converge vers $1/2$ qui n'est pas un point fixe de f.

II - Estimation de la vitesse de convergence

1) Points attractifs, points répulsifs

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$, de classe C^1.
Soit $a \in I$ un point fixe de f.

Def 19 : On dit que a est
- attractif lorsque $|f'(a)| < 1$
- répulsif lorsque $|f'(a)| > 1$

Prop 20 : Si a est attractif, alors il existe un intervalle fermé $J \subset I$ tel que $f(J) \subset J$ et f soit K-contractante sur J, avec $K < 1$.
De plus, pour tout $u_0 \in J$, la suite $(u_{n+1} = f(u_n))_n$ converge vers a, et pour tout n, $|u_n - a| \leq K^n |u_0 - a|$.

Ex 21 : Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{1+x}$. On note $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, un point fixe de f sur $\mathbb{R}_+$. Alors $|f'(\varphi)| = \frac{1}{1+\sqrt{5}} < 1$
donc φ est attractif et la suite $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$, $u_0 = 0$ converge vers φ.

Prop 22 : Si a est répulsif, alors il existe un intervalle $J \subset I$ et $K > 1$ tels que $|f'| \geq K$ sur J, a
De plus toute suite $(u_{n+1} = f(u_n))_n$ et $u_0 \in J$ sort de J, sauf si $u_0 = a$.

Rem 23 : On peut alors considérer $\tilde{f} = f^{-1}$, pour avoir $|\tilde{f}'(a)| < 1$.

Rem 24 : Si $|f'(a)| = 1$, on ne peut rien dire en général.
Par exemple, si $f : [0,1] \to [0,1]$, $f(x) = 1 - x$, alors $\frac{1}{2}$ est point fixe mais ni attractif ni répulsif.

2) Méthode de Newton : un cas super attractif

Soit $F : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2, qui s'annule en un unique point $a \in I$.

Prop 25 : Supposons que F' ne s'annule pas sur I.
Soit $f : I \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - \frac{F(x)}{F'(x)}$. Alors a est un point fixe attractif de f, et même superattractif au sens où $f'(a) = 0$.

Rem 26 : D'après la proposition 20, on peut donc approcher a avec une vitesse au moins géométrique.
En fait, on a mieux : soit $M = \sup_I \left|\frac{f''(x)}{f'(x)}\right|$ et $h = \frac{1}{M}$.
$\forall u_0 \in [a-h, a+h]$, $|u_n - a| \leq \frac{1}{M}(M|u_0 - a|)^{2^n}$.

Thm 27 (Newton-Raphson) : Soit $F : \Omega \to \mathbb{R}^d$ de classe C^2, et $a \in \Omega$ un zéro de F. On suppose que $dF(a)$ est inversible
Alors a est un point fixe superattractif de
$f : x \mapsto x - dF(a)^{-1} \circ F(x)$.

Ex 28 : Pour estimer la racine d'un nombre réel x_0, on peut appliquer cette méthode à $F(x) = x_0 - x^2$, sur $\mathbb{R}_+$.

Ex 29 : Si $J : \Omega \to \mathbb{R}$ est de classe C^3, on peut appliquer la méthode de Newton-Raphson à dJ pour obtenir les points critiques de J, candidats des extremums.

3) Théorème de point fixe de Picard

Rem 30 : On a vu en proposition 20 que lorsque f est contractante, la convergence vers le point fixe est géométrique.

Thm 31 : Soit X un espace métrique complet, $f : X \to X$ K-contractante avec $K < 1$. Alors il existe un unique point fixe, a, de f et pour tout $u_0 \in X$, la suite $(u_{n+1} = f(u_n))$ converge vers a, et pour tout n, $d(x_n,a) \leq \frac{K^n}{1-K} d(x_0, x_1)$.

C.ex 32. L'hypothèse de complétude est importante. si $f :]0,1[\to]0,1[$, $f(x) = \frac{x^2}{4}$, f n'a pas de points fixes.

Rem 33. L'hypothèse $K<1$ est nécessaire pour la vitesse de convergence, mais également pour l'existence de points fixes : par exemple, soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{1+x^2}$. f est strictement 1-lipschitzienne mais n'a pas de point fixe.

Application 34 :

III - Applications à l'analyse matricielle

1) Approximation spectrale

Prop 35 (Décomposition QR) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Il existe $Q \in \mathcal{U}_n(\mathbb{C})$ et R triangulaire supérieure avec des coefficients diagonaux positifs telles que
$$A = QR.$$
De plus, si A est inversible, alors le couple (Q,R) est unique.

Algorithme 36. Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$, dont on cherche les valeurs propres. Posons $A_0 = A$ et, pour tout $k \geq 0$, $A_{k+1} = R_k Q_k$ où (Q_k, R_k) est la décomposition QR de A_k.

DEV ②

Thm 37 : On suppose que $Spec(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ avec $|\lambda_1| > \dots > |\lambda_n| > 0$. Ecrivons $A = PDP^{-1}$ avec $D = diag(\lambda_i)$. On suppose aussi que P^{-1} admet une factorisation LU. Alors : pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $(A_k)_{ii} \xrightarrow[k\to+\infty]{} \lambda_i$
$j > i$, $(A_k)_{ij} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$

Application 38.

2) Résolution de systèmes linéaires

Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$ et $b \in \mathbb{C}^n$. On cherche à résoudre "$AX = b$".

Heuristique 39 : On transforme le problème en une recherche de point fixe : soient $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, tels que $A = M - N$, et $M \in GL_n(\mathbb{C})$ "plus simple à inverser que A". Alors X est solution de $AX = b$ ssi X est point fixe de $f : x \mapsto M^{-1}Nx + M^{-1}b$.

Théorème 40 : La suite définie par $x_0 \in \mathbb{C}^n$, $x_{k+1} = f(x_k)$ est convergente vers une solution de "$AX = b$" ssi $\rho(M^{-1}N) < 1$ (rayon spectral).

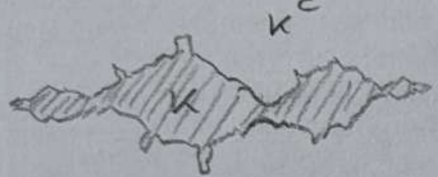
Def 41 (Méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel). On pose $D = diag(A_{11}, \dots, A_{nn})$, $E = (-A_{ij} \mathbb{1}_{\{i>j\}})$, et $F = (-A_{ij} \mathbb{1}_{\{i<j\}})$, de telle sorte que $A = D - E - F$.
- Jacobi : on choisit $M := D$
- Gauss-Seidel : on choisit $M := D - E$.

Thm 42 : Supposons que A soit tridiagonale par blocs. Alors les méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel convergent ou divergent simultanément. En cas de convergence, Gauss-Seidel est plus rapide, et moins coûteuse en mémoire.

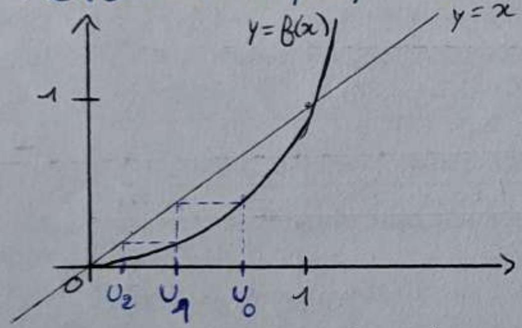
Ex 43 :

Annexe

① Ensembles de Julia (Ex 12)



② Monotonie (prop 16) :



$u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ et $(u_n)_n$ est décroissante.