243

Séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications.

I- Rayon de convergence

1) Notion de série entière

Def 1 : Soit $(a_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n : z \mapsto a_n z^n$. La série de fonctions $\sum f_n$ est appelée série entière.

Rem 2 : Par abus de notation, on écrira $\sum a_n z^n$.

Prop 3 : (lemme d'Abel) : Soit $\sum a_n z^n$ une série entière, et $\rho \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $(a_n \rho^n)_n$ soit bornée.
Alors pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \rho$, la série $\sum a_n z^n$ converge absolument.

Def 4 : Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. Le réel achevé
$$R := \sup\{\rho \in \mathbb{R}_+^*,\ (\rho^n a_n)_n \text{ est bornée}\}$$
est appelé le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$. Si l'ensemble est vide, on pose $R = 0$.

Prop 5 : Soit $\sum a_n z^n$ une série entière et R son rayon de convergence. Soit $z \in \mathbb{C}$
Si $|z| < R$, $\sum a_n z^n$ converge absolument.
Si $|z| > R$, $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement. (voir annexe)

Ex 6 : Considérons $\sum z^n$: son rayon vaut 1, et pour tout z sur le cercle d'incertitude $(|z| = 1)$, la série diverge.

Ex 7 : Si on prend $\sum \frac{z^n}{n}$, le rayon vaut aussi 1, mais pour $z = -1$ la série converge.

Prop 8 : Critère de d'Alembert. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière, telle qu'il existe $N \in \mathbb{N}$, tel que pour tout $n \geq N$, $a_n \neq 0$.
On suppose que $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell \in \overline{\mathbb{R}}_+$.
Alors le rayon de $\sum a_n z^n$ vaut $1/\ell$.

Ex 9 : Soit F une fraction rationnelle non nulle. Alors le rayon de $\sum F(n) z^n$ vaut 1.

Ex 10 : Si $a_n = \sin(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, la règle de d'Alembert ne s'applique pas.

2) Comparaisons et opérations sur les séries entières

Prop 11 : Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$, deux séries entières de rayons R_a et R_b respectivement.
Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|a_n| \leq |b_n|$ alors $R_a \geq R_b$.
Si $a_n = O(b_n)$ alors $R_a \geq R_b$.
Si $|a_n| \sim_{+\infty} |b_n|$ alors $R_a = R_b$.

Ex 12 : Calculons le rayon de $\sum e^{\sin n} z^n$:
On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $e^{-1} \leq e^{\sin n} \leq e$.
Et les rayons de $\sum e^{-1} z^n$ et de $\sum e z^n$ valent 1.
Donc le rayon de $\sum e^{\sin n} z^n$ vaut 1 aussi.

Prop 13 (structure vectorielle) : Soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$, soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons R_a et R_b.
- Alors le rayon de $\sum \lambda a_n z^n$ vaut R_a, et pour tous $|z| < R_a$, $\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda a_n z^n = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.
- Le rayon de $\sum (a_n + b_n) z^n$ est supérieur à $\min(R_a, R_b)$, égal si $R_a \neq R_b$, et pour tout $|z| < \min(R_a, R_b)$,
$$\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n.$$

Ex 14 : $\sum z^n$ et $\sum -z^n$ sont de rayon 1 mais $\sum (1-1) z^n = 0$ est de rayon infini.

+ d'exemples

mettre le critère de Cauchy

Def 15 : Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières. Leur produit de Cauchy est la série $\sum c_n z^n$ où pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.

application : produit de fonctions génératrices

Prop 16 : Soient $\sum a_n z^n$, de rayon R_a et $\sum b_n z^n$ de rayon R_b. On note $\sum c_n z^n$ leur produit de Cauchy, de rayon R_c. Alors $R_c \geq \min(R_a, R_b)$ et $\forall |z| < \min(R_a, R_b)$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right).$$

Ex 17 : Il se peut que $R_c \neq \min(R_a, R_b)$ même si $R_a \neq R_b$: si $a_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\begin{cases} b_0 = 1 \\ b_1 = -1 \\ b_n = 0 \ \forall n \geq 2 \end{cases}$

alors $R_a = 1$, $R_b = +\infty$ et $R_c = +\infty$.

3) Questions de régularité

Prop 18 : Soit $\sum a_n z^n$ et R_a son rayon de convergence. Alors la série $\sum_{n \geq 1} n a_n z^{n-1}$ est de rayon R_a aussi.

Théorème 19 : Soit $\sum a_n z^n$ une série entière et R son rayon. Alors la série converge normalement sur tout compact inclus dans $D(0,R)$.
En particulier, la somme de la série est infiniment $\mathbb{C}$-dérivable sur $D(0,R)$ (donc holomorphe), et ses dérivées s'obtiennent en dérivant terme à terme.

Ex 20 : Soit X une variable aléatoire discrète, et $G_X(s) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=n) s^n$ sa fonction génératrice.
Alors G_X est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$.

Prop 21 (Abel) : Soit $(a_n)_n \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$. Alors la série $\sum a_n$ converge ssi la fonction $s \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n s^n$ admet une limite finie en 1^-.

DEV ①

Coro 22 : Soit X une variable aléatoire discrète. Alors $\mathbb{E}(X) < +\infty$ ssi G_X est dérivable en 1^-, et dans ce cas $\mathbb{E}(X) = G_X'(1^-)$.

Ex 23 : Si on pose $\mathbb{P}(X = 2^n) = \frac{1}{2^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\mathbb{P}(X = k) = 0$ si k n'est pas une puissance de 2, alors $G_X(s) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} s^{2^n}$ donc $G_X'(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} s^{2^n - 1}$ n'admet pas de limite finie en 1^-. Ainsi $\mathbb{E}(X)$ n'est pas finie.

Ex 24, si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, alors $G_X(s) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} s^n$
donc $G_X'(s) = \lambda e^{-\lambda} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} s^{n-1} \xrightarrow[s \to 1^-]{} \lambda < +\infty$.
Ainsi $\mathbb{E}(X) = \lambda$.

II - Développement en série entière, applications

1) Fonctions holomorphes, fonctions analytiques

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$.

Def 25 : Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$. On dit que f est analytique lorsque pour tout $z_0 \in \Omega$, il existe une suite $(c_n)_n$ et $r > 0$ tels que
$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n$ partout $z \in D(z_0, r)$.
Cela revient à dire que f est développable en séries entières en tout point de Ω.

Ex 26 (DSE usuels) :
- $\forall z \in \mathbb{C}$, $e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$, $\cos(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$, $\sin(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$

Ex 27 (DSE usuels, suite) :

- $\forall z \in]-1,1[, \ \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n$

Application 28 (Théorème de Runge) : DEV ②

Soit K un compact de $\mathbb{C}$, on note $K^c = \bigsqcup_{n=0}^{+\infty} \omega_n$ la décomposition en composantes connexes de K^c, avec ω_0 non bornée.
Soit $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ une suite telle que $\alpha_n \in \omega_n, \forall n \geq 1$.
Soit $a \in K^c$. Alors $\varphi_a : z \mapsto \frac{1}{z-a}$ est limite uniforme de fractions rationnelles sur K dont les pôles sont parmi les $(\alpha_n)_{n\geq 1}$. (voir annexe)

Prop 29 (Unicité du DSE) : Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$, développable en série entière en $z_0 \in \Omega$:
$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$ pour $z \in D(z_0, r)$.
Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$.

Ex 30 : On retrouve ainsi les DSE des fonctions usuelles.

Prop 31 (Formule de la moyenne) : Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction analytique. Soit $z_0 \in \Omega$, et $\sum c_n (z-z_0)^n$ le DSE de f sur $D(z_0, r)$, $r > 0$.
Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$c_n = \frac{1}{\rho^n} \int_0^{2\pi} f(z_0 + \rho e^{i\theta}) e^{-in\theta} \frac{d\theta}{2\pi} \quad \forall \rho < r.$$

Application 32 (Espace de Bergman) : On note $\mathcal{B}(\mathbb{D})$ l'ensemble des fonctions holomorphes et de carré intégrable sur le disque $\mathbb{D} := D(0,1)$.
Alors $\mathcal{B}(\mathbb{D})$ est un espace de Hilbert.

Application 33 : Soit $\sum a_n z^n$ une série entière dont le rayon de convergence est infini.
Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sa somme. Si f est bornée alors elle est constante.

2) Applications

Ex 34 (Résolution d'équations différentielles) : Cherchons les solutions développables en séries entières de $y'' = xy$.
Si $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, alors :
$\forall n \geq 1$, $a_{n+2} = \frac{a_{n-1}}{(n+2)(n+1)}$ et $a_2 = 0$.
On conclut en étudiant le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$.

Ex 35 (Dénombrement) : On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, D_n le nombre de permutations de $\mathfrak{S}_n$ qui n'ont pas de point fixe.
Alors la série $\sum \frac{D_n}{n!} z^n$ a un rayon de convergence supérieur à 1.
On calcule que pour tout $|z| < 1$,

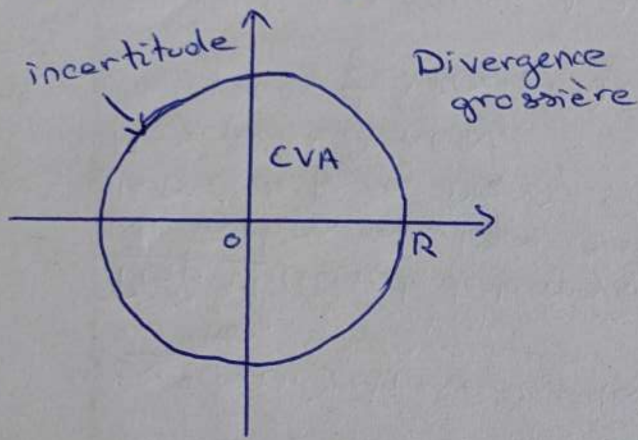
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{D_n}{n!} z^n = \frac{e^{-z}}{1-z}.$$

Par unicité du développement en série entière, on obtient que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$D_n = \left\lfloor \frac{n!}{e} + \frac{1}{2} \right\rfloor.$$

Annexe

• Disque de convergence :



• Théorème de Runge :