245

Fonction d'une variable complexe. Exemples et applications.

I - Dérivabilité, analyticité

1) Fonctions complexes dérivables

<u>Rem 1</u>: On connaît déjà des fonctions de la variable complexe : rotations, dilatations, polynômes...

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$.

<u>Def 2</u>: Une fonction $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est $\mathbb{C}$-dérivable lorsque pour tout $a \in \Omega$, la limite suivante existe: $\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$. On appelle $f'(a)$ cette limite.

<u>Ex 3</u>: Les fonctions polynomiales sont dérivables sur $\mathbb{C}$.

<u>Ex 4</u>: La fonction $z \mapsto \bar{z}$ n'est pas dérivable en 0.

<u>Prop 5</u>: Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Alors f est dérivable en $a \in \Omega$ ssi, en identifiant $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{C}$, f est différentiable en a et $df(a)$ est $\mathbb{C}$-linéaire.

<u>Coro 6</u>: Notons $u := \mathrm{Re}(f)$ et $v := \mathrm{Im}(f)$. Alors f est dérivable ssi f est différentiable et

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \; ; \; \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{(Cauchy-Riemann)}$$

<u>Def 7</u>: Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$. On dit que f est holomorphe lorsque f est dérivable sur Ω.

<u>Ex 8</u>: Une série entière $\sum a_n z^n$ est holomorphe dans son disque de convergence.

2) Théorème de Cauchy et conséquences

<u>Lemme 9 (Goursat)</u>: Soit Δ un triangle fermé inclus dans Ω. Soit f holomorphe sur Ω.
Alors $\int_{\partial \Delta} f = 0$

<u>Thm 10 (Cauchy)</u>: Soit Ω un ouvert convexe et f holomorphe sur Ω. Soit γ un chemin fermé dans Ω. Alors $\int_\gamma f = 0$.

<u>Coro 11</u>: (Formule de Cauchy) Soit f holomorphe sur un ouvert Ω convexe et γ un chemin fermé dans Ω. Alors pour tout $z \in \Omega$,

$$\mathrm{Ind}_\gamma(z) f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \, , \text{ où } \mathrm{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{1}{\xi - z} d\xi$$

<u>Coro 12</u>: Soit f holomorphe sur Ω. Alors f est développable en série entière sur Ω.

<u>Ex 13</u>: Si f est holomorphe sur $D(0,1)$, alors pour tout $z \in D(0,1)$, $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$ avec $c_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D(0,r)} \frac{f(\xi)}{\xi^{n+1}} d\xi$ avec $r < 1$.

<u>Coro 14</u>: Soit Ω un ouvert connexe et f holomorphe sur Ω, non nulle. Soit $a \in \Omega$ tq $f(a) = 0$. Alors il existe un unique entier m positif et une unique fonction g holomorphe sur Ω tq
$f(z) = (z-a)^m g(z)$ et $g(a) \neq 0$.
On dit que m est l'ordre de a comme zéro de f.

<u>Thm 15</u>: (Principe des zéros isolés): Soit Ω un ouvert connexe et f holomorphe sur Ω, non nulle. Alors les zéros de f sont isolés.

<u>Coro 16</u>: Si deux fonctions f, g holomorphes sur Ω connexe coïncident sur un ensemble possédant un point d'accumulation, alors $f = g$ sur Ω.

Rem 17: Ce théorème est faux pour des fonctions seulement de classe C^∞ : par exemple, la fonction $f: x \mapsto \begin{cases} e^{-1/x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est de classe C^∞ et est identiquement nulle sur $\mathbb{R}_-$.

Coro 18: Si f est holomorphe sur Ω, alors f n'admet qu'un nombre fini de zéros sur tout compact de Ω.

Ex 19: Cela généralise le fait que les polynômes n'ont qu'un nombre fini de racines.

II - Exemples et outils pour l'étude de fonctions holomorphes

1) Fonctions exponentielle et logarithmes

Def 20: On note, pour $z \in \mathbb{C}$, $\exp(z) := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$.

Prop 21: La série $\sum \frac{z^n}{n!}$ est uniformément convergente sur tout compact de $\mathbb{C}$. Ainsi la fonction exponentielle est bien définie, et analytique sur $\mathbb{C}$.

Prop 22: La fonction exp vérifie :
- $\forall z \in \mathbb{C}$, $e^z \neq 0$, $\forall k \in \mathbb{Z}$, $e^{2ik\pi} = 1$.
- $\forall z \in \mathbb{C}$, $\exp'(z) = \exp(z)$
- sur $\mathbb{R}$, on a $\exp(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$ et $\exp(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} 0$.

Rem 23: On peut alors définir les fonctions sinus et cosinus en posant, pour tout $z \in \mathbb{C}$,
$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$ et $\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$.

Def 24: On appelle détermination du logarithme toute fonction $\ell : X \to \mathbb{C}$, où $X \subset \mathbb{C}$, telle que $\forall z \in X$, $\exp(\ell(z)) = z$.

Prop 25: La fonction $\mathrm{Log} : z \mapsto \ln(|z|) + i\arg(z)$ où arg est une détermination de l'argument, est une détermination du logarithme.
De plus, Log est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus L_\alpha$ où L_α est la demi-droite $\{te^{i\alpha}, t \in \mathbb{R}_+\}$ tq $\arg(z) \in]\alpha, 2\pi + \alpha]$.

Application 26: Définir une détermination du logarithme permet de définir les fonctions puissances $z \mapsto z^a$ pour tout $a \in \mathbb{C}$, en posant $z^a = \exp(a\log(z))$.

2) Intégrales à paramètre

Thm 27 (Holomorphie sous le signe intégrale) : Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, $(T, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré et $F : \Omega \times T \to \mathbb{C}$ telle que :
(i) $\forall z \in \Omega$, $t \mapsto F(z,t)$ est mesurable
(ii) $\forall t \in T$, $z \mapsto F(z,t)$ est holomorphe sur Ω
(iii) Pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe $g \in L^1(T)$ tq $\forall (z,t) \in K \times T$, $|F(z,t)| \leq g(t)$.
Alors la fonction $f : z \mapsto \int_T F(z,t)\,d\mu(t)$ est holomorphe sur Ω, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $z \in \Omega$,
$f^{(n)}(z) = \int_T \frac{\partial^n F}{\partial z^n}(z,t)\,d\mu(t)$.

Rem 28: Comparé au cas réel, on n'a pas à dominer les dérivées de F pour obtenir le résultat.

Ex 29: (Fonction Γ d'Euler) : Soit $z \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}(z) > 0$. On pose $\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t}\,dt$. La fonction Γ ainsi définie est holomorphe sur $\{\mathrm{Re} > 0\}$.

3) Inégalité de Cauchy

Rem 30 : Par formule de Cauchy, toute fonction holomorphe au voisinage d'un disque $\overline{D(z_0,r)}$ vérifie la propriété de la moyenne :

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0+re^{i\theta})d\theta \quad \text{ou encore } f(z_0)=\frac{1}{\pi r^2}\int_{D(z_0,r)} f.$$

Coro 31 : Soit f holomorphe sur $D(z_0,R)$. Alors $\forall n\in\mathbb{N}, \forall r\in]0,R[, \left|\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}\right| \leq \frac{M(r)}{r^n}$ où $M(r)=\sup_{\partial D(z_0,r)} |f|$

Coro 32 (Weierstrass) : Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions holomorphes dans Ω, qui converge uniformément sur les compacts de Ω vers f.
Alors f est holomorphe et $(f_n')_n$ cv uniformément vers f', sur les compacts de Ω.

Ex 33 : La fonction $\zeta : s \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$ est holomorphe sur $\{Re(s)>1\}$.

Coro 33 (Principe du maximum) : Soit Ω un ouvert connexe borné. Soit f holomorphe sur Ω et continue sur $\overline{\Omega}$. Alors
$\forall z\in\Omega, \ |f(z)| \leq \max\{f(\xi), \xi\in\partial\Omega\}$
Si f n'est pas constante, l'inégalité est stricte.

Application 34 (Etude d'un ensemble de Julia) : DEV ①
Soit $P\in\mathbb{C}[X]$, $d^oP\geq 2$. On considère
$K := \{z_0\in\mathbb{C}, (P^n(z_0))_n \text{ est bornée}\}$ où $P^n = \underbrace{P\circ\dots\circ P}_{n \text{ fois}}$
Alors K est compact et K^c est connexe par arcs.

III - Fonctions méromorphes

Def 35 : Soit f holomorphe sur $\Omega\setminus\{a\}$. On dit que a est
une singularité effaçable si f est bornée au vois de a ;
un pôle si $|f(z)| \xrightarrow[z\to a]{} +\infty$;
une singularité essentielle sinon.

Thm 36 : Soit f holomorphe sur $\Omega\setminus\{a\}$, avec a un pôle.
Alors il existe un unique $m\in\mathbb{N}^*$, une unique fonction g holomorphe sur Ω tels que, au voisinage de a,
$$f(z) = \frac{c_{-m}}{(z-a)^m} + \dots + \frac{c_{-1}}{(z-a)} + g(z).$$
On appelle m l'ordre du pôle a pour f.

Def 37 : Avec les mêmes notations, on pose
$Res(f,a) := c_{-1}$.

Def 38 : On appelle fonction méromorphe sur Ω toute fonction holomorphe sur $\Omega\setminus S$ où S est discret et uniquement composé de pôles pour la fonction.

Thm 39 (Résidus) : Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, f méromorphe sur Ω avec $S\subset\Omega$ les pôles de f. Soit γ un chemin dans $\Omega\setminus S$, tel que pour tout $a\notin\Omega$, $Ind_\gamma(a)=0$.
Alors $\int_\gamma f = 2i\pi \sum_{s\in S} Res(f,s)Ind_\gamma(s)$.

Application 40 (Formule des compléments) : DEV ②
Pour tout $z\in\mathbb{C}$ tq $0<Re(z)<1$, on a
$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$$