250 — Transformation de Fourier. Applications.

Soit $d\in\mathbb{N}^*$. On notera L^p pour $L^p(\mathbb{R}^d,\mathbb{C})$.

I- Transformée de fonctions intégrables

1) Généralités

Def 1: Soit $f\in L^1$. La transformée de Fourier de f est définie par:

$$\forall \xi\in\mathbb{R}^d,\quad \mathcal{F}(f)(\xi) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-i\langle x,\xi\rangle}dx$$

On note aussi $\hat f$.

Prop 2: Pour $f\in L^1$, $\hat f$ est bien définie, et

$$\hat f(\xi)\xrightarrow[\|\xi\|\to+\infty]{}0 \quad \text{(lemme de Riemann-Lebesgue)}$$

Ex 3: Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac12 e^{-|x|}$ (densité de Poisson). On a $f\in L^1(\mathbb{R})$ et, pour $\xi\in\mathbb{R}$,

$$\hat f(\xi)=\frac{1}{1+\xi^2}.$$

Thm 4: Soit $f\in L^1$. Alors $\hat f$ est continue, et $\|\hat f\|_\infty\le\|f\|_1$. Ainsi $\mathcal{F}: L^1\to C_0$, $f\mapsto\hat f$ est une application linéaire et continue.

Rem 5: Ainsi la transformée de Fourier permet d'obtenir de la régularité.
Par exemple, soit $f=\mathbb{1}_{[a,b]}$ avec $a<b$.
On a, pour $\xi\in\mathbb{R}$, $\hat f(\xi)=2\sin\left(\frac{b-a}{2}\xi\right)\frac{e^{-i\frac{a+b}{2}\xi}}{\xi}$.
$\hat f$ est continue, mais pas intégrable.

Notation 6: Si $f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{C}$, on note $\check f$ la fonction $x\mapsto f(-x)$.

Prop 7: Soit $f\in L^1$.
(i) $\mathcal{F}(\check f)=\check{\mathcal{F}}(f)$; $\mathcal{F}(\bar f)=\overline{\check{\mathcal{F}(f)}}$
(ii) Si f est paire alors $\hat f$ est paire
(iii) Si f est réelle impaire alors $\hat f$ est réelle impaire.
(iv) Si $\lambda\in\mathbb{R}^*$, $\mathcal{F}(f(\lambda x))(\xi)=\frac{1}{|\lambda|^d}\mathcal{F}(f)\left(\frac{\xi}{\lambda}\right)\quad\forall\xi\in\mathbb{R}^d$
(v) Si $a\in\mathbb{R}^d$, $\mathcal{F}(f(x-a))(\xi)=e^{-i\langle a,\xi\rangle}\mathcal{F}(f)(\xi)$
$\mathcal{F}(e^{i\langle a,x\rangle}f)(\xi)=\mathcal{F}(f)(\xi-a)$

Ex 8: Transformée d'une gaussienne: soit $a\in\mathbb{R}_+^*$.
Soit $f:x\mapsto e^{-ax^2}$.
Alors $\hat f(\xi)=\sqrt{\frac{\pi}{a}}\,e^{-\frac{\xi^2}{4a}}$.

Prop 9: Soit $f\in L^1\cap C^1$. Soit $j\in[\![1,d]\!]$. Si $\partial_j f\in L^1$, alors $\forall\xi\in\mathbb{R}^d$, $\mathcal{F}(\partial_j f)(\xi)=i\xi_j\mathcal{F}(f)(\xi)$.

Prop 10: Soit $f\in L^1$ telle que $x\mapsto x_jf(x)$ soit intégrable. Alors $\hat f$ admet une dérivée partielle $\partial_j\hat f$ telle que $\forall\xi\in\mathbb{R}^d$, $\partial_j\hat f(\xi)=-i\mathcal{F}(x_jf)(\xi)$

Ex 11: On peut ainsi calculer des transformée de Fourier en résolvant des équations différentielles.
Par exemple, si $f:x\mapsto e^{-ax^2}$, f est solution de $y'=-2axy$ donc $\hat f$ est solution de $y'=-\frac{1}{2a}xy$.

Rem 12: Si f est seulement dérivable p.p. de dérivée intégrable, la proposition 9 ne tient plus.
Par exemple, avec $f=\mathbb{1}_{[a,b]}$, on a $f'=0$ p.p. mais $\hat f\neq0$.

2) Convolution et inversion

Def 13: Soient f,g deux fonctions mesurables de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{C}$. On dit que f et g sont convolables, lorsque la fonction $y\mapsto f(x-y)g(y)$ est intégrable, pour presque tout $x\in\mathbb{R}^d$.
On note alors $f*g(x):=\int_{\mathbb{R}^d}f(x-y)g(y)dy$.

Prop 14: Soient $f,g\in L^1$. Alors f et g sont convolables, et $\mathcal{F}(f*g)=\hat f\hat g$.

Application 15: Il n'existe pas de fonction intégrable neutre pour la convolution.

Ex 16: Si $f\in L^1$ et vérifie $f*f=f$ p.p., alors $f=0$.

Thm 17: La transformée de Fourier $\mathcal{F}: L^1\to C_0$ est injective.

Rem 18 : La transformée de Fourier $L^1 \to C_0$ n'est pas surjective.

Thm 19 (Inversion dans L^1). Soit $f \in L^1$ telle que $\hat{f} \in L^1$. Alors $\hat{\hat{f}} = (2\pi)^d \check{f}$ p.p., i.e.
$\forall x \in \mathbb{R}^d$, $f(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi) e^{i\langle x, \xi\rangle} d\xi$.

Ex 20 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. On a
$\mathcal{F}(f)(\xi) = \mathcal{F}(\mathcal{F}(\frac{1}{2} e^{-|\xi|}))(\xi)$
$= 2\pi \times \frac{1}{2} e^{-|\xi|} = \pi e^{-|\xi|}$.

Prop 21 : Soient $f, g \in L^1$, tq $\hat{f} \in L^1$. Alors $\widehat{fg} = \frac{1}{(2\pi)^d} \hat{f} * \hat{g}$.

II - Transformée dans L^2 et dans $\mathcal{S}$

Objectif : Faire de la transformée de Fourier un isomorphisme.

1) Fonctions de carré intégrables

Prop 22 : $L^1 \cap L^2$ est dense dans L^2.

Thm 23 (Plancherel-Parseval) : Soit $f \in L^1$.
Alors $\|\hat{f}\|_2^2 = (2\pi)^d \|f\|_2^2$, et donc $f \in L^2$ ssi $\hat{f} \in L^2$.

Ex 24 : Soit $f = \mathbb{1}_{[-1,1]}$. On a $\hat{f}(\xi) = 2\frac{\sin(\xi)}{\xi}$.
Par Plancherel, $\|\hat{f}\|_2^2 = 2\pi \|f\|_2^2$.
D'où : $\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin \xi^2}{\xi^2} d\xi = \frac{\pi}{2} \times \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[-1,1]}(x) dx = \pi$.

Prop 25 : Il existe une unique application $\tilde{\mathcal{F}} : L^2 \to L^2$ telle que $\forall f \in L^1 \cap L^2$, $\tilde{\mathcal{F}}(f) = \hat{f}$. De plus, $\tilde{\mathcal{F}}$ est continue.

Thm 26 : L'application $\tilde{\mathcal{F}} : L^2 \to L^2$ définie ci-dessus est un isomorphisme.

Rem 27 : La proposition 7 reste valable pour $\tilde{\mathcal{F}}$.

Prop 28 : Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$.
On a $\int_{-A}^{A} f(x) e^{-ix\xi} dx \xrightarrow[A \to +\infty]{\|\cdot\|_2} \hat{f}$, dans L^2.

Coro 29 : Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$ tq $\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi < +\infty$ pour tout x.
Alors presque partout, $f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi$

Ex 30 : Soit $f = \mathbb{1}_{[-1,1]}$.
On a $\hat{f}(\xi) = \frac{2\sin(\xi)}{\xi}$, et l'intégrale de Dirichlet $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ existe et est finie.
Alors $\int_{-\infty}^{+\infty} 2\frac{\sin t}{t} dt = 2\pi f(0) = 2\pi$, d'où $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$.

2) Espace de Schwartz

Def 31 : On dit que $\phi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$) est à décroissance rapide, lorsque pour tout $p \in \mathbb{N}$,
$\mathcal{N}_p(\phi) := \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq p} \|x^\alpha \partial^\beta \phi\|_\infty < +\infty$. On note $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

Rem 32 : Le terme "décroissance rapide" vient du fait que si ϕ est à déc. rapide, pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_d]$, pour tout $\beta \in \mathbb{N}^d$, $|P(x) \partial^\beta \phi(x)| \xrightarrow[|x| \to +\infty]{} 0$.

Prop 33 :
(i) si $f \in L^1$ est à déc. rapide, alors $\hat{f} \in C^\infty$.
(ii) si $f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$, et pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$, $\partial^\alpha f \in L^1$, alors $\hat{f}$ est à déc. rapide.

Notation 34 : On note $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ l'ens. des fonctions C^∞ à déc. rapide.

Prop 35 : Pour tout $p \in [1, +\infty]$, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subset L^p$.
De plus, $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

Thm 36 : La transformation de Fourier est un isomorphisme de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ dans lui-même, d'inverse
$\mathcal{F}^{-1} : f \mapsto \left(x \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} f(\xi) e^{ix\xi} \frac{d\xi}{(2\pi)^d}\right)$.

III - Transformée de distributions tempérées

1) Notion de distribution tempérée

Def 37 : Soit $T \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)^*$. On dit que T est une distribution tempérée lorsque il existe $p \in \mathbb{N}$, $C > 0$ tq $\forall \phi \in C^\infty_c(\mathbb{R}^d)$, $|\langle T, \phi \rangle| \leq C \mathcal{N}_p(\phi)$

Prop 38 : L'ensemble des distributions tempérées est un espace vectoriel, noté $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. On a $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$.

Ex 39 : Si f est une fonction continue à croissance polynomiale, alors $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

Prop 40 : Pour tout $p \in [1, +\infty]$, $L^p \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

Ex 41 : La fonction $x \mapsto e^x$ n'est pas dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

Thm 42 : Soit $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. Alors
(i) $\forall \alpha \in \mathbb{N}^d$, $\partial^\alpha T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$
(ii) $\forall f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ tq f et toutes ses dérivées soient à croissance polynomiale, $fT \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.
(iii) Pour $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ à support compact, $T * S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ où $\langle T * S, \phi \rangle = \langle T, \langle S, \phi(\cdot - x) \rangle \rangle$

2) Transformée de Fourier, transformée partielle

Def 43 : Soit $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. Pour tout $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, on pose $\langle \mathcal{F}(T), \phi \rangle = \langle T, \mathcal{F}(\phi) \rangle$.

Rem 44 : Comme $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, la formule explicite est valable pour $\mathcal{F}(\phi)$.

Rem 45 : On retrouve par dualité les formules des propositions 7, 9, et 10.

Application 46 : transformée de Gaussiennes complexes] DEV 1

Prop 47 : L'opérateur $\mathcal{F} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ est un isomorphisme bicontinu.

Def 48 : Transformée de Fourier partielle

3) Application à la résolution d'EDP

Soit $P = i\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2}\Delta x$ un opérateur différentiel.

Def : Une solution élémentaire de P est une distribution tempérée $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$ telle que $PT = \delta_{0,0}$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$

Intérêt : Si S est une distribution à support compact et ψ une fonction de $\mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ à support compact, pour résoudre "$Pf = S$ et $f(t=0, x) = \psi(x)$", il suffit de poser $T = E * (S + \delta \otimes \psi)$ où E est une solution élémentaire de P.

Thm : Il existe une unique solution élémentaire de P vérifiant $\operatorname{supp} E \subset \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$. DEV 2

De plus, pour tout $\phi \in C^\infty_c(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$,

$\langle E, \phi \rangle =$