265 Fonctions usuelles et spéciales (Exemples d'études et d'applications de ~)

## Introduction

**Thm 1**: Soit $\Omega$ un ouvert connexe de $\mathbb{C}$. Si $f$ et $g$ sont holomorphes sur $\Omega$ et coïncident sur une partie de $\Omega$ possédant un point d'accumulation, alors $f=g$ sur $\Omega$.

## I - Redécouvrir les fonctions de notre enfance

### 1) Fonction exponentielle

**Def 2**: Sur $\mathbb{R}$, on avait défini l'exponentielle comme l'unique solution du problème de Cauchy $\begin{cases} y'=y \\ y(0)=1 \end{cases}$.

**Def 3**: De même, on définit sinus et cosinus sur $\mathbb{R}$ comme les coordonnées d'un point sur le cercle unité.

**Rem 4**: Une définition plus rigoureuse serait de définir arctan comme une primitive de $\frac{1}{1+t^2}$ qui vaut 0 en 0, puis d'en déduire la fonction tan sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et enfin de poser $\cos(x) = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$, $\sin(x) = \frac{\tan x}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$, sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ et d'étendre à $\mathbb{R}$ par parité (resp. imparité) et $2\pi$-périodicité.

**Prop 5** (propriétés de l'exponentielle réelle): (voir annexe)
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$
- $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ est bijective
- exp est croissante, strictement, et convexe
- $e^x \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ ; $e^x \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$ ; $\forall x,y \in \mathbb{R}$, $e^{x+y} = e^x e^y$.

**Prop 6** (propriétés des fonctions trigonométriques): (voir annexe)
- cos et sin sont de classe $C^\infty$, $\cos' = -\sin$, $\sin' = \cos$.
- $\forall x,y \in \mathbb{R}$, $\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$
  $\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$
- $\cos(0) = 1$, $\sin(0) = 0$.

**Def 7** (Exponentielle complexe): Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on pose $e^z := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$, la convergence étant normale sur $\mathbb{C}$.

**Prop 8**: L'exponentielle complexe ainsi définie prolonge l'exponentielle réelle.
On a de plus :
- $\forall z, z' \in \mathbb{C}$, $e^{z+z'} = e^z e^{z'}$ ; $e^z \neq 0$.
- Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $e^{2i\pi k} = 1$. (exp est $2i\pi$-périodique)
- $\forall x,y \in \mathbb{R}$, $e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$
- e est holomorphe sur $\mathbb{C}$, égale à sa dérivée.

**Def 9**. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on pose $\sin(z) := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ et $\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$.

**Prop 10**: Les fonctions sinus et cosinus sont holomorphes sur $\mathbb{C}$, et leurs propriétés sur $\mathbb{R}$ sont encore valables sur $\mathbb{C}$.

**Application 11**: L'exponentielle permet notamment de définir la transformée de Fourier d'une fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$:
$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ix\xi} dx \quad \forall \xi \in \mathbb{R}$.

### 2) Fonctions logarithmes

**Def 12**: Sur $\mathbb{R}_+^*$, on définit le logarithme ln comme la réciproque de $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$.

**Prop 13**: La fonction ln est de classe $C^\infty$.
- $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln'(x) = \frac{1}{x}$, $\ln(1) = 0$.
- $\ln(x) \xrightarrow[x\to 0]{} -\infty$ ; $\ln(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$
- $\forall x,y \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$.

**Def 14** (Détermination principale du logarithme): Soit $z \in \mathbb{C}^*$. $z$ peut s'écrire de manière unique comme $z = re^{i\theta}$ avec $\theta \in ]-\pi, \pi]$, et $r > 0$.
On pose $\log(z) = \ln(r) + i\theta$.

**Prop 15**: La fonction logarithme définie ci-dessus est holomorphe sur $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_-$, et prolonge la fonction ln.
C'est une primitive de $z \mapsto \frac{1}{z}$, sur $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_-$.

**Def 16**: Une détermination du logarithme est une fonction $g : X \to \mathbb{C}$, $X \subset \mathbb{C}^*$, telle que $\exp \circ g = id_X$.

**Prop 17** : La détermination principale du logarithme est une détermination sur $\mathbb{C}^*$.
Il n'existe pas de détermination continue sur $\mathbb{C}^*$.

**Rem 18** : Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $D_\alpha := \{te^{i\alpha}, t \geq 0\}$. Alors tout nombre $z \in \mathbb{C} \setminus D_\alpha$ s'écrit de manière unique comme $z = re^{i\theta_\alpha}$ avec $r > 0$ et $\theta_\alpha \in ]\alpha, 2\pi + \alpha[$.
Alors la fonction
$$\mathrm{Log}_\alpha : \begin{array}{rcl} \mathbb{C} \setminus D_\alpha & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \ln(r) + i\theta_\alpha \end{array}$$
est une détermination holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus D_\alpha$ du logarithme.

**Prop 19** : La détermination principale du logarithme est développable en série entière sur $D(1,1)$, et
$\forall z \in D(0,1)$, $\log(1+z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n$

**Application 20** : Les logarithmes permettent de définir des puissances de nombres complexes.
Par exemple, pour $\alpha \in \mathbb{C}$ et $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, on pose
$z^\alpha := \exp(\alpha \log(z))$.
Ainsi la fonction $\alpha \mapsto z^\alpha$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$, et $z \mapsto z^\alpha$ est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$.

# II - Généraliser la factorielle

## 1) Fonction $\Gamma$ d'Euler

**Def 21** : Pour tout $x > 0$, on pose $\Gamma(x) := \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$.

**Prop 22** : La quantité $\Gamma(x)$ est bien définie et finie.
La fonction $\Gamma$ ainsi définie est de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$, et strictement croissante sur $[2, +\infty[$.

**Prop 23** : Pour tout $x > 0$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, et $\Gamma(1) = 1$.
Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Gamma(n+1) = n!$.
De plus, $\Gamma(x+1) \underset{+\infty}{\sim} x^x \sqrt{2\pi x}\, e^{-x}$ (Formule de Stirling)

**Prop 24** (Intégrale de Gauss) : $\Gamma(\frac{1}{2}) = 2\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}$.

**Prop 25** : $\Gamma(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} +\infty$ (voir annexe)

**Prop 26** : En fait, la quantité $\Gamma(z) := \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$ est bien définie et finie pour tout $z \in \mathbb{C}$ tq $Re(z) > 0$.
La fonction $\Gamma : \{Re > 0\} \to \mathbb{C}$ est holomorphe.

**Prop 27** : Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $Re(z) > 0$, on a $\Gamma(z) \neq 0$ et
$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z e^{\gamma z} \prod_{n=0}^{+\infty} \left(1 + \frac{z}{k}\right) e^{-z/k}.$$

**Thm 28** : La fonction $\Gamma$ se prolonge de manière unique en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ dont les pôles sont les entiers négatifs. Ce sont des pôles simples.

## 2) Application à l'étude des nombres premiers

**Thm 29** (Résidus) : Soit $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f$ une fonction holomorphe sur $\Omega \setminus S$, où $S$ est une partie de $\Omega$ sans point d'accumulation.
Soit $K \subset \Omega$ un compact tel que $\partial K$ définit un bord de classe $C^1$ par morceaux et qui n'intersecte pas $S$.
Alors $S \cap K$ est fini, et
$$\int_{\partial K} f = 2i\pi \sum_{a \in S \cap K} \mathrm{Res}(f, a)$$
où $\mathrm{Res}(f,a)$ est le coefficient de $\frac{1}{z-a}$ dans le développement de $f$ au point $a$.

**Application 30** (Formule des compléments) : Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $0 < Re(z) < 1$, on a
$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}.$$
DEV 1

**Def 31** (Fonction $\zeta$ de Riemann) : Soit $s \in \mathbb{C}$, $Re(s) > 1$. La série $\sum \frac{1}{n^s}$ converge absolument. On note $\zeta(s)$ sa somme.

**Prop 32** : La fonction $\zeta : \{Re > 1\} \to \mathbb{C}$ est holomorphe qui ne s'annule pas.

Prop 33 (Lien avec les nombres premiers) :
Soit $(p_n)_n$ la suite des nombres premiers rangés par ordre croissant. Soit $s \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}(s) > 1$.
Alors $\frac{1}{\zeta(s)} = \prod_{n=0}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{p_n^s}\right)$.

Coro 34 : La série $\sum \frac{1}{p_n}$ est divergente.

Thm 35 : La fonction $\zeta$ se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$, dont le seul pôle est 1. C'est un pôle simple, et le résidu de $\zeta$ en 1 vaut 1.

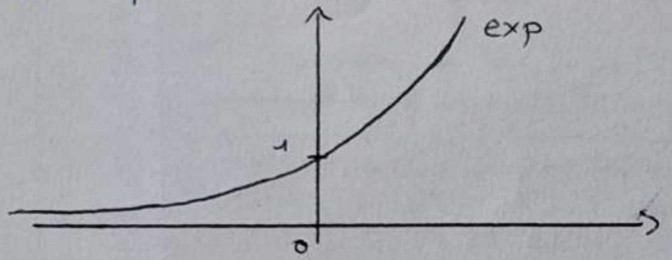
DEV ②

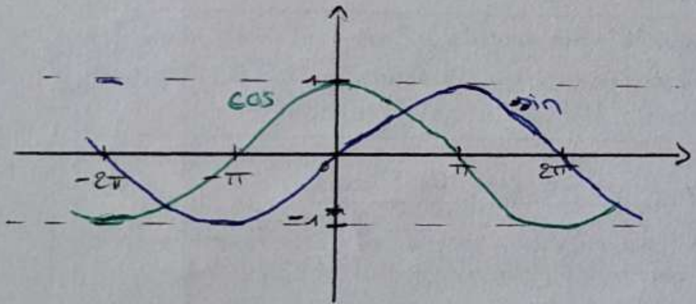
Rem 36 : (Conjecture de Riemann) : Les zéros non-triviaux de $\zeta$, i.e. distincts des entiers pairs négatifs, sont sur la droite $\{\mathrm{Re}\, z = \frac{1}{2}\}$.

Prop 37 : Soit $x > 0$. On pose $\phi(x) := \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n^2 \pi x}$.
Alors pour tout $s \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$, l'expression suivante est valide :
$$\zeta(s) = \frac{\sqrt{\pi}^{\,s}}{\Gamma(\frac{s}{2})} \int_0^{+\infty} \phi(x)\, x^{\frac{s}{2}-1}\, dx .$$

Annexes :

① exponentielle, sinus et cosinus sur $\mathbb{R}$




② Fonction $\Gamma$ sur $\mathbb{R}_+^*$