Exemples d'utilisation de courbes en dimension 2 ou supérieures.

267

I - Représenter une dynamique

1) Déplacement ponctuel dans le plan

Def 1: Une courbe paramétrée de classe C^k est une application $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$, de classe C^k sur $\mathring{I}$, avec I un intervalle de $\mathbb{R}$, d'intérieur non vide.
L'image de γ est appelée support de la courbe.
Si $I = [a,b]$ est compact, alors γ est appelé un chemin d'origine $\gamma(a)$ et d'extrémité $\gamma(b)$. Si $\gamma(a) = \gamma(b)$, et γ continue, on dit que γ est un lacet.
Enfin, si γ est injective on dit que la courbe est simple.

Exemple 2: Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^k. On associe naturellement à f la courbe définie par $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (t, f(t))$.

Prop 3: Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ une courbe C^1_{pm} et $\varphi : J \to I$ un C^1-difféomorphisme.
Alors $\gamma \circ \varphi$ définit une courbe C^1_{pm} qui a le même support que γ. Il s'agit d'une reparamétrisation.

Rem 4: Concrètement, le paramètre t représente souvent le temps. Par exemple, une chute libre est représentée par une parabole, paramétrée par $t \mapsto (t, -t^2)$.

Définition 5: On dit qu'une courbe $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ est définie par une équation implicite lorsqu'il existe $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que $\gamma(I) = f^{-1}(\{0\})$.

Ex 6: Une ellipse, paramétrée par $\gamma(t) = (a\cos t, b\sin t)$ est définie par l'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$.
En première approximation, cela correspond au mouvement des planètes autour du soleil (Kepler).

Def 7: Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ une courbe C^1, et $t_0 \in I$ tel que $\gamma'(t_0) \neq 0$. (on dit que $\gamma(t_0)$ est un point régulier).
La tangente à la courbe en t_0 est la droite passant par $\gamma(t_0)$ et dirigée par $\gamma'(t_0)$.

Rem 8: Si la courbe représente un déplacement ponctuel, le vecteur $\gamma'(t_0)$ donne la vitesse instantanée du mobile au temps t_0.

2) Etude de systèmes différentiels

Def 9: Un champ de vecteurs est la donnée d'un système
$$(*) \begin{cases} x' = f(x,y) \\ y' = g(x,y) \end{cases}$$
avec $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ lipschitziennes localement

Prop 10: Etant donnée une condition initiale $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, il existe une unique solution maximale de $(*)$ vérifiant $x(0) = x_0$ et $y(0) = y_0$.

Def 11: Le portrait de phases de $(*)$ est la partition du plan en les trajectoires $(x(t), y(t))$.

Application 12: Systèmes hamiltoniens.
Soit $V : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application C^1 (le potentiel)
On pose $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $H(x,y) = \frac{1}{2}y^2 + V(x)$ (l'hamiltonien)
et on considère le système
$$\begin{cases} x' = \frac{\partial H}{\partial y} \\ y' = -\frac{\partial H}{\partial x} \end{cases}$$
Alors les trajectoires solutions sont les courbes de niveaux de H, i.e. vérifient $H(x(t), y(t)) = c$ avec $c \in \mathbb{R}$.

Exemple 13: Si $V(x) = -\cos(x)$, on obtient la modélisa° d'un pendule non amorti (voir annexe).

II - Mesurer grâce aux courbes

1) Longueur

Def 14: Soit $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ une courbe C^1. La longueur de la courbe est $L = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$ où $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne.

Prop 15: La longueur d'une courbe ne dépend pas de son paramétrage.

Def 16: Soit $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ une courbe C^1, telle que pour tout $t \in [a,b]$, $\gamma'(t) \neq 0$. L'abscisse curviligne est un paramétrage de la courbe défini comme suit : soit $\varphi : t \mapsto \int_a^t \|\gamma'(s)\| ds$. Alors φ est un C^1-difféo, et on pose $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi^{-1}$: il s'agit de l'abscisse curviligne.

Prop 17: Pour tout $t \in]a,b[$, $\|\tilde{\gamma}'(t)\| = 1$.

Exemple 18: Longueur d'un cercle de rayon r :
On prend $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$.
Alors $L(\gamma) = 2\pi r$.

2) Calculs d'aires, de périmètres

Théorème 19 (Green-Riemann) : Soit $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ un lacet C^1pm, orientée positivement, et telle que γ soit injective sur $[a,b[$. Notons S la surface délimitée par γ.
Soient $P, Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^1. Alors

$$\iint_S \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \, dx dy = \int_\gamma P dx + Q dy$$

Coro 20: Soit A l'aire de la surface S du théorème 19.
Alors $A = \int_a^b x(t) y'(t) dt$ où on note $\gamma(t) = (x(t), y(t))$.

DEV ①

Application 21: Inégalité isopérimétrique.
Soit $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ un lacet de classe C^1pm, délimitant une surface S d'aire A et de périmètre L.
Alors $L^2 \geqslant 4\pi A$ avec égalité ssi γ définit un cercle.

Exemple 22: L'aire d'un carré de côté π vaut π^2, et son périmètre 4π : $16\pi^2 \geqslant 4\pi^3$. Un cercle de rayon 2 a un périmètre de 4π, et son aire vaut 4π.

III - Explorer une topologie

1) Connexité par arcs

Def 23: Soit X un espace topologique. On dit que X est connexe par arcs lorsque pour tout $(x,y) \in X^2$, il existe $\gamma : [0,1] \to X$ continue telle que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$.
On dit que γ est un chemin reliant x et y.

Ex 24: Tout espace convexe est connexe par arcs.

Prop 25: Tout connexe par arcs est connexe.

Rem 26: On utilise souvent la connexité par arcs pour montrer qu'un espace est connexe.

Ex 27: $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs, donc connexe.
Ainsi toute application de différentielle nulle sur $GL_n(\mathbb{C})$ est constante.

2) Homotopie

Def 28: Soient X, Y deux espaces topologiques, et $f, g : X \to Y$, continues. On dit que f et g sont homotopes lorsqu'il existe $H : [0,1] \times X \to Y$ continue telle que :
$\forall x \in X$, $H(0,x) = f(x)$; $H(1,x) = g(x)$
Si de plus, $X = [0,1]$ et $f(0) = f(1) = g(0) = g(1) = x_0$, et $\forall t \in [0,1]$, $H(t,0) = H(t,1) = x_0$, alors H est une homotopie de lacets. (voir annexe).

Ex 29: Les courbes $\gamma_1 : \begin{array}{l} [0,1] \to \mathbb{C}^* \\ \theta \mapsto e^{2i\pi\theta} \end{array}$ et $\gamma_2 : [0,1] \to \mathbb{C}^*$
avec $\gamma_2(t) = (1 + i(2t-1)) \mathbb{1}_{[0,\frac{1}{4}]}(t) + (1 - 2t + i) \mathbb{1}_{[1/4, 1/2]}(t)$
$+ (-1 + i(1-2t)) \mathbb{1}_{[1/2, 3/4]}(t) + (2t - 1 - i) \mathbb{1}_{[3/4, 1]}(t)$
sont homotopes. (voir annexe).

Def 30. Un espace topologique X est dit simplement connexe lorsqu'il existe $x_0 \in X$ tel que tout lacet $\gamma : [0,1] \to X$ soit homotope à l'application constante $t \mapsto x_0$.

Ex 31: Pour $n \geq 2$, la sphère $\mathbb{S}^n$ est simplement connexe. Mais $\mathbb{S}^1$ ne l'est pas.

Def 32. Soit X un espace topologique connexe par arcs. L'ensemble des classes d'équivalence homotopiques des lacets dans X, muni de la composition, est un groupe appelé groupe fondamental de X et noté $\pi_0(X)$.

Ex 33: $\pi_0(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z}$.

IV - Applications en analyses complexe

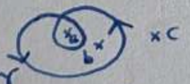
1) Indices et logarithmes

Def 36: Soit $a \in \mathbb{C}$, et γ un lacet dans $\mathbb{C}\setminus\{a\}$. L'indice de γ par rapport à a est

$$\mathrm{Ind}(\gamma, a) := \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{dz}{z-a}$$

Prop 37: Soit γ un lacet dans $\mathbb{C}$ et $a \in \mathbb{C}\setminus \mathrm{Im}\,\gamma$. Alors $\mathrm{Ind}(\gamma,a)$ est un entier, et $2\pi\,\mathrm{Ind}(\gamma,a)$ est la variation de l'argument de $\gamma - a$.

Ex 38: Considérons le lacet suivant :



On a $\mathrm{Ind}(\gamma,a) = 2$, $\mathrm{Ind}(\gamma,b) = 1$ et $\mathrm{Ind}(\gamma,c) = 0$.

Prop 39: Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}^*$. f admet un logarithme continu ssi pour tout lacet γ dans Ω, $\mathrm{Ind}(f\circ\gamma, 0) = 0$.

Prop 40 (Cauchy): Soit Ω un ouvert simplement connexe et $a \in \Omega$. Soit γ un lacet dans Ω qui ne passe pas par a. Alors pour toute fonction f homorphe sur Ω,

$$\mathrm{Ind}(\gamma,a)\, f(a) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}\,dz.$$

2) Théorème des résidus, application

Thm 41: Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, $S \subset \Omega$ sans point d'accumulation et γ un lacet dans Ω, homotope à un lacet constant et tq $\mathrm{Im}\,\gamma \cap S = \emptyset$.
Soit f homorphe sur $\Omega\setminus S$.
Alors $\mathrm{Im}\,\gamma \cap S$ est fini, et $\displaystyle\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma f(z)\,dz = \sum_{a \in \mathrm{Im}\gamma\cap S} \mathrm{Res}(f,a)$

où $\mathrm{Res}(f,a)$ est le coefficient de $\frac{1}{z-a}$ dans le développement en série de Laurent de f en a.

Ex 42: Si $f : \mathbb{C}\setminus\{1\} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \frac{1}{z-1}$, on a $\displaystyle\frac{1}{2i\pi}\int_{\mathbb{S}^1} f = 1$.

Def 43: Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tq $\mathrm{Re}(z) > 0$, on pose
$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t}\,dt.$$

Prop 44: La fonction Γ ainsi définie est holomorphe.

Prop 45 (Formule des compléments)
Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $0 < \mathrm{Re}(z) < 1$,
$$\Gamma(z)\,\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$$

DEV 2