Espace de Bergman

Perrine Jouteur

Ce développement concerne les leçons 201, 205, 208, 213, 234, 245. Il se trouve dans le livre *Analyse pour l'agrégation de mathématiques* de Bernis et Bernis.

Définition 0.1 On désigne par $\mathbb{D}$ le disque unité ouvert dans $\mathbb{C}$. On va considérer l'espace des fonctions holomorphes de carré intégrable sur $\mathbb{D}$, noté $\mathbb{B}(\mathbb{D})$.
C'est un espace vectoriel, sous-espace de $L^2(\mathbb{D})$ donc muni d'un produit scalaire, noté $<,>$.

1 Le développement

Théorème 1.1 L'espace $(\mathbb{B}(\mathbb{D}), <,>)$ est un espace de Hilbert, muni d'une base hilbertienne donnée par

$$e_n : z \longmapsto \sqrt{\frac{n+1}{\pi}} z^n.$$

De plus, il existe un noyau reproduisant $K : \mathbb{D}^2 \to \mathbb{C}$, i.e. tel que pour tout $f \in \mathbb{B}(\mathbb{D})$, on ait

$$\forall z \in \mathbb{D}, \quad f(z) = \int_{\mathbb{D}} f(w)K(z,w)dw.$$

Lemme 1.1 Soit $f \in \mathbb{B}(\mathbb{D})$ et C un compact du disque $\mathbb{D}$. Alors on a

$$\max_{z\in C} |f(z)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{\pi} d(C, \mathbb{S}^1)} \|f\|_2$$

où $\mathbb{S}^1$ est le cercle unité, frontière de $\mathbb{D}$.

Démonstration (succincte du lemme)
On écrit que $f(z)$ est la moyenne de ses valeurs sur le disque de centre z et de rayon $r < 1 - |z|$, puis on applique Cauchy-Schwarz, et enfin on remarque que $d(C, \mathbb{S}^1) \leqslant 1 - |z|$. ■

Démonstration (du théorème)
• Étape 1 : Montrons déjà qu'il s'agit d'un espace de Hilbert.

L'espace de Bergman est un sous-espace de $L^2(\mathbb{D})$, qui est complet par théorème de Riesz-Fischer, donc il suffit de montrer qu'il est fermé dans $L^2(\mathbb{D})$ pour montrer qu'il est complet.

Soit donc $(f_n)_n$ une suite de fonctions de $\mathbb{B}(\mathbb{D})$ qui converge en norme $L^2(\mathbb{D})$, vers une fonction f. La fonction f est dans $L^2(\mathbb{D})$. Montrons qu'elle est "holomorphe" sur $\mathbb{D}$ (c'est-à-dire qu'elle est presque partout égale à une fonction holomorphe sur $\mathbb{D}$).
Soit C un compact du disque $\mathbb{D}$. Comme $(f_n)_n$ converge dans L^2, elle est de Cauchy pour la norme $\|\cdot\|_2$, et d'après le lemme précédent, on a en fait que

$$\max_{z\in C} |f_p(z) - f_q(z)| \underset{p,q\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Ainsi (voir l'annexe), $(f_n)_n$ converge uniformément vers une certaine fonction holomorphe g sur $\mathbb{D}$. En particulier, $(f_n)_n$ converge simplement vers g. Or par théorème de Riesz-Fischer, il existe une suite extractrice ϕ telle que la suite $(f_{\phi(n)})_n$ converge presque-partout vers f sur $\mathbb{D}$. Par unicité de la limite simple, $f = g$ presque partout sur $\mathbb{D}$, et c'est ce qu'on voulait.
Ainsi $\mathbb{B}(\mathbb{D})$ est un espace de Hilbert.

• Étape 2 : Montrons que la famille $(e_n)_n$ est une base hilbertienne de $\mathbb{B}(\mathbb{D})$.

Tout d'abord, un simple calcul nous rassure sur le caractère orthonormé de cette famille. En effet, soient $n, m \in \mathbb{N}$. Par changement de coordonnées polaires, on a

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{D}} z^n \overline{z^m} dz &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^n r^m e^{in\theta - im\theta} r dr d\theta \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} e^{i\theta(n-m)} d\theta \right) r^{n+m+1} dr \\ &= \begin{cases} \frac{\pi}{n+1} \text{ si } n = m \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}\end{aligned}$$

Ainsi $(e_n)_n$ est bien une famille orthonormale. Montrons à présent qu'elle est totale. On utilise pour cela le critère du supplémentaire orthogonal, valable car $\mathbb{B}(\mathbb{D})$ est un Hilbert.
Soit donc $f \in \mathbb{B}(\mathbb{D})$, orthogonal à tous les e_n. Comme f est holomorphe, pour tout $z \in \mathbb{D}$ on a

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

où $a_n = \dfrac{1}{2\pi r^n} \displaystyle\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta$ avec $0 < r < 1$ quelconque. Donc, par définition du produit scalaire, pour tout $m \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}< f, e_m > &= \sqrt{\frac{m+1}{\pi}} \int_{\mathbb{D}} f(z) \overline{z^m} dz \\ &= \sqrt{\frac{m+1}{\pi}} \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^m f(re^{i\theta}) e^{-im\theta} r d\theta dr \\ &= \sqrt{\frac{m+1}{\pi}} \int_0^1 r^m (2\pi r^m a_m) r dr \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{m+1}} a_m\end{aligned}$$

Or par hypothèse, ce produit scalaire $< f, e_m >$ est nul, donc $a_m = 0$ pour tout $m \in \mathbb{N}$, et ainsi f est nulle.
La famille $(e_n)_n$ est donc bien une base hilbertienne de $\mathbb{B}(\mathbb{D})$.

• Étape 3 : Montrons l'existence d'un noyau reproduisant.
Pour tout $z \in \mathbb{D}$, la forme linéaire d'évaluation $f \longmapsto f(z)$ est continue, d'après le lemme. Par théorème de Riesz, il existe donc un unique élément $k_z \in \mathbb{B}(\mathbb{D})$ qui représente cette forme linéaire, i.e. pour tout $f \in \mathbb{B}(\mathbb{D})$,

$$f(z) = < f, k_z > .$$

Considérons la fonction suivante :

$$K : \begin{array}{ccc} \mathbb{D}^2 & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (z, w) & \longmapsto & \overline{k_z(w)} \end{array} .$$

Cette fonction est bien définie d'après ce qui précède. Soit $z \in \mathbb{D}$. Par formule de Parseval, on a la convergence en norme $\|\cdot\|_2$ vers k_z de sa série de Fourier :

$$k_z = \sum_{n=0}^{+\infty} < k_z, e_n > e_n.$$

Donc

$$K(z, \cdot) = \overline{\sum_{n=0}^{+\infty} < k_z, e_n > e_n} = \sum_{n=0}^{+\infty} < e_n, k_z > \overline{e_n} = \sum_{n=0}^{+\infty} e_n(z) \overline{e_n}.$$

Cette convergence s'effectue en norme $\|\cdot\|_2$, mais aussi en norme infinie sur tout compact de $\mathbb{D}$ d'après le lemme 2. Ainsi, on peut donner une formule explicite pour K. Pour tout $z, w \in \mathbb{D}$,

$$K(z,w) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{\pi}(z\overline{w})^n = \frac{1}{\pi}\frac{1}{(1-z\overline{w})^2}.$$

Il ne reste plus qu'à vérifier qu'on a l'égalité voulue : soit $f \in \mathbb{B}(\mathbb{D})$. Alors

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{D}} f(w)K(z,w)dw &= \int_{\mathbb{D}} f(w)\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n+1}{\pi}(z\overline{w})^n dw\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n+1}{\pi}z^n\int_{\mathbb{D}}\overline{w}^n f(w)dw\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\sqrt{\frac{n+1}{\pi}}z^n < f, e_n >\\ &= f(z)\end{aligned}$$

L'interversion série-intégrale étant valide par théorème de Fubini. ■

2 Annexes

2.1 Prérequis

Lemme 2.1 Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions holomorphes sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$. Supposons que pour tout compact C de Ω, on ait

$$\max_{z\in C}|f_p(z) - f_q(z)| \underset{p,q\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Alors $(f_n)_n$ converge dans $\mathrm{Hol}(\Omega)$ vers une fonction f, holomorphe sur Ω donc.

Démonstration (voir Amar Matheron, page 91). ■

2.2 Autour du noyau reproduisant

Remarque 2.1 Une utilité du noyau reproduisant est qu'il définit une projection de $L^2(\mathbb{D})$ dans $\mathbb{B}(\mathbb{D})$, via :

$$\begin{array}{cccc} B_{\mathbb{D}}: & L^2(\mathbb{D}) & \longrightarrow & \mathbb{B}(\mathbb{D}) \\ & f & \longmapsto & z \mapsto \int_{\mathbb{D}} f(w)K(z,w)dw \end{array}.$$

Remarque 2.2 Les noyaux reproduisant sont utiles par exemples en théorie de l'apprentissage statistique, parce qu'on dispose d'un théorème qui dit que si un espace est muni d'un noyau reproduisant, alors dans cet espace, le problème de minimisation d'une fonctionnelle (le "risque", ou l'"erreur" commise) est en fait un problème en dimension finie.