Théorème de Cauchy-Lipschitz

Perrine Jouteur

Ce qui suit peut être adapté en développement en sélectionnant des morceaux à présenter de manière cohérente.

On considère le problème de Cauchy suivant :

$$(1)\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}(t) = v(t, x(t))\\ x(t_0) = x_0\end{cases}$$

avec $v : I \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$, une fonction, et $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

1 Le théorème

Théoreme 1.1 Cauchy-Lipschitz (cas local)
Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Soit $v : I \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue, et localement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable, i.e. :
Pour tout K compact de $I \times \Omega$, il existe $L > 0$ telle que

$$\forall (t, x_1), (t, x_2) \in K, ||v(t, x_1) - v(t, x_2)|| \leq L||x_1 - x_2||$$

Alors il existe une unique solution maximale (x, J), avec J un intervalle ouvert de I et x une fonction de classe C^1 sur J.

Théoreme 1.2 Cauchy-Lipschitz (cas global)
Si la fonction v est globalement définie (sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$) et globalement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable, alors il existe une unique solution globale définie sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Démonstration (cas global)
Soit $T > 0$, tel que $LT < 1$. Soient $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Notons $E_{t_0} = C^0([t_0, T + t_0], \mathbb{R}^n)$, et considérons la fonction auxiliaire suivante :

$$\begin{array}{rccc}\Theta_{(t_0,x_0)} : & E_{t_0} & \longrightarrow & E_{t_0} \\ & x & \longmapsto & (t \mapsto x_0 + \int_{t_0}^{t} v(s, x(s))ds\end{array}$$

Remarquons que $\Theta_{(t_0,x_0)}$ est contractante. En effet, soient $x_1, x_2 \in E_{t_0}$. On a, pour tout $t \in [t_0, T + t_0]$,

$$\begin{aligned}||\Theta_{(t_0,x_0)}(x_1)(t) - \Theta_{(t_0,x_0)}(x_2)(t)|| &\leqslant \int_{t_0}^{t} ||v(s, x_1(s)) - v(s, x_2(s))||ds \\ &\leqslant LT||x_1 - x_2||_\infty\end{aligned}$$

Ainsi $||\Theta_{(t_0,x_0)}(x_1) - \Theta_{(t_0,x_0)}(x_2)||_\infty \leqslant LT||x_1 - x_2||_\infty$, avec par hypothèse $LT < 1$. De plus, E_{t_0} est un espace de Banach, donc on peut appliquer le théorème de point fixe de Banach : l'application $\Theta_{(t_0,x_0)}$ possède un unique point fixe dans E_{t_0}, que l'on note $x_{(t_0,x_0)}$. Cette fonction vérifie :

$$x_0 + \int_0^t v(s, x_{(t_0,x_0)}(s))ds = x_{(t_0,x_0)}(s) \ \forall t \in [t_0, T + t_0]$$

Ainsi $x_{(t_0,x_0)}$ est l'unique solution du problème de Cauchy associé à la condition initiale (t_0, x_0), sur $[t_0, T + t_0]$.

En recollant, on a une unique solution globale... ■

Remarque 1.1 Discussions autour des hypothèses et des conclusions

• La lipschitzianité est nécessaire à l'unicité. En effet, considérer le problème suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \sqrt{x} \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

La fonction nulle est solution, mais aussi $t \mapsto t^2/2$.

• Les solutions ne sont pas forcément globales :

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -\dfrac{t}{x} \\ x(0) = \lambda > 0 \end{cases}$$

Ici, le champ de vecteur est localement lipschitzien par rapport à x sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$, mais la solution maximale est seulement définie sur $]-\lambda, \lambda[$.

2 Conséquences

Proposition 2.1 Si x_1 et x_2 sont deux solutions de (1) sur un intervalle I, pour deux conditions initiales différentes, alors elles ne se coupent pas.

Démonstration
Par contraposée : supposons qu'il existe $t_1 \in I$ tel que $x_1(t_1) = x_2(t_1)$. Alors x_1 et x_2 sont solutions du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = v(t, x) \\ x(t_1) = x_1(t_1) \end{cases}$$

Par unicité, $x_1 = x_2$. ∎

Proposition 2.2 Si le champ de vecteur v est seulement L^1_{loc} en t, et localement lipschitzienne en x, alors il existe une unique fonction x continue sur un intervalle fermé $[t_0 - T, t_0 + T]$ qui vérifie la forme intégrale de (1).

Proposition 2.3 Si v est T-périodique en t, alors une solution x est T-périodique si et seulement si $x(0) = x(T)$.

Proposition 2.4 Soit $F \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ telle que $F(t, 0, 0) = 0$. Alors toute solution non nulle de $y'' = F(t, y, y')$ a ses zéros isolés.

Démonstration ((esquisse))
On montre que si t_0 est un zéro non isolé de y, alors il existe une suite (t_n) qui tend vers t_0 et telle que $y(t_n) = 0$ pour tout n, et par des taux d'accroissements, on montre que $y'(t_0) = 0$, et donc par unicité du pb de Cauchy on a que y est nulle. ∎

3 Critère d'explosion en temps fini

Théoreme 3.1 Soit $v :]a, b[\times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Soit $(x,]T_*, T^*[)$ une solution maximale. Alors

— ou bien $T^* = b$
— ou bien $T^* < b$ et x n'est pas bornée au voisinage de T^*.

Démonstration ((esquisse))
Par l'absurde : on suppose que $T^* < b$ et x est bornée par M au voisinage de T^*. On montre alors qu'on peut prolonger x à $]T_*, T^*]$, ce qui contredira la maximalité de x. Pour montrer que ça se prolonge en T^*, on utilise une suite de Cauchy. ∎