Conique passant par cinq points

Perrine Jouteur

Ce développement se place dans les leçons 152, 162, 171, 181, 191. Ma référence était *Géométrie analytique classique* de J.D. Eiden. Quand on l'expose au tableau, faire des dessins aide beaucoup à comprendre ce qu'il se passe.
Attention, il y a une disjonction de cas assez longue à effectuer, qui mérite d'être répétée plusieurs fois pour fluidifier l'exposition.

1 Contexte et prérequis

Définition 1.1 Repère barycentrique, équation d'une conique dans un tel repère.

Proposition 1.1 Les coniques dégénérées sont les unions de droites, les points et la conique vide.

Proposition 1.2 Trois points A, B, C du plan affine sont alignés ssi en coordonnées barycentriques,

$$\begin{vmatrix} x_A & y_A & z_A \\ x_B & y_B & z_B \\ x_C & y_C & z_C \end{vmatrix} = 0.$$

2 Le développement

Théorème 2.1
Soient A, B, C, D, E cinq points distincts du plan réel. Il existe une conique passant par ces cinq points. De plus, il existe une unique conique passant pas ces cinq points si et seulement si il n'y a pas quatre points alignés parmi A, B, C, D, E. Dans ce cas, la conique est non dégénérée si et seulement si il n'y a pas trois points alignés parmi A, B, C, D, E.

Démonstration
• Étape 1 : Existence.
On élimine le cas où les cinq points sont alignés, ce qui nous permet de prendre un repère barycentrique en ABC. Alors l'équation d'une conique passant par A, B, C, D, E est de la forme

$$pxy + qyz + rxz = 0.$$

Et les points D, E sont sur la conique si et seulement si le système suivant est vérifié, avec (x_1, y_1, z_1) les coordonnées de D et (x_2, y_2, z_2) celles de E :

$$(S) \qquad \begin{cases} px_1y_1 + qy_1z_1 + rx_1z_1 = 0 \\ px_2y_2 + qy_2z_2 + rx_2z_2 = 0 \end{cases} .$$

Or ce système est de rang inférieur à 2 donc il existe une solution non nulle. (on peut écrire ce système de manière matricielle, c'est parfois plus clair).

• Étape 2 : CNS d'unicité.
Si il y a quatre points alignés, alors on prend la réunion de la droite qui passe par les quatre points et n'importe quelle autre droite passant par le dernier point fait l'affaire, donc il n'y a clairement pas unicité.

S'il n'y a pas unicité, montrons qu'on peut trouver quatre points alignés. Ne pas avoir unicité revient à dire que le système était de rang inférieur à 1, donc que tous les mineurs extrauts de taille 2 sont nuls. D'où

$$y_1y_2 \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} = 0 \text{ et } z_1z_2 \begin{vmatrix} y_1 & x_1 \\ y_2 & x_2 \end{vmatrix} = 0 \text{ et } x_1x_2 \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} = 0.$$

On réécrit cela en faisant apparaitre des déterminants d_1, d_2, d_3 qui traduisent le fait que les points A, D, E, resp. B, D, E et C, D, E soient alignés :

$$y_1y_2 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = 0 \text{ et } z_1z_2 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = 0 \text{ et } x_1x_2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Maintenant on peut commencer la distinction de cas. D'abord, si les trois déterminants sont nuls : alors les cinq points sont alignés, donc impossible.
Ensuite, si deux parmi les déterminants sont nuls, par exemple $d_1 = d_2 = 0$, alors les points A, B, D, E sont alignés, donc ok.
Sinon : deux déterminants sont non nuls, par exemples d_1 et d_2. Alors $x_1x_2 = 0$ et $y_1y_2 = 0$. Par exemple, $x_1 = 0$. Alors $y_1 \neq 0$ et $z_1 \neq 0$ car sinon D serait confondu avec B ou C.
Mais alors nécessairement $y_2 = 0$ et donc par le même argument, $x_2 \neq 0$ et $z_2 \neq 0$. Donc $d_3 = 0$. Cela signifie que C, D, E sont alignés, et que D est sur la droite (BC) et E sur la droite (AC)... Donc les cinq points sont alignés, ce qui absurde.

• Étape 3 : CNS de non dégénérescence (en développement, Jad ne l'avait pas fait)
On se place dans une situation où la conique est déterminée de manière unique par les cinq points, donc où il n'y a pas quatre points alignés.

Si la conique est dégénérée, alors elle est formée de deux droites, donc il y a trois points alignés parmi les cinq.

Inversement, supposons qu'il y ait trois points alignés parmi les cinq, par exemple A, B, D. Alors la conique formée de la droite (AB) et de la droite (CE) contient tous les points A, B, C, D, E. Par unicité, c'est la bonne, et elle est dégénérée.